



Exponentielles et logarithme décimal

13



Combien d'habitants
à Saint-Désert ?

La population de la ville de Saint-Désert était de 50 000 habitants au 1^{er} janvier 2011. À la suite de l'implantation de plusieurs entreprises dans les environs, on considère que cette population va augmenter chaque année de 5 % pendant six ans.

– Calculer le nombre d'habitants prévus à Saint-Désert au 1^{er} janvier 2012 et au 1^{er} janvier 2013.

Pour faire une demande de subvention, le maire doit donner une estimation du nombre de ses administrés au 1^{er} juillet 2012.

– Proposer une méthode de calcul.

Est-ce que je sais... ?

1. Calculer les termes d'une suite géométrique

La suite géométrique (u_n) est définie par son premier terme $u_0 = 100$ et sa raison 0,5. Calculer u_3 , ainsi que le 6^e terme.

2. Reconnaître une suite géométrique

Les suites (u_n) définies ci-dessous ont pour premier terme 20. Lesquelles sont géométriques ?

- a) On passe de u_n à u_{n+1} en multipliant u_n par 0,9.
- b) On passe de u_n à u_{n+1} en ajoutant 0,9 à u_n .
- c) On augmente u_n de 10 % pour obtenir u_{n+1} .
- d) On diminue u_n de 10 % pour obtenir u_{n+1} .

Activité 1 Passer d'une suite géométrique à une fonction exponentielle

Une belle plante à croissance exponentielle

Une plante sortant de terre a une hauteur de 1 mm. On l'arrose chaque jour, pendant quatre semaines, avec un engrais miraculeux, et sa taille est multipliée par 10 toutes les semaines.

1 Étude d'une suite

On note u_0 la taille de la plante, en mm, au début de l'expérience ; u_1 celle au bout d'une semaine ; u_2 celle au bout de 2 semaines.

On définit de même u_3 et u_4 .

On appelle (u_n) la suite $(u_0, u_1, u_2, u_3, u_4)$.

- a) Donner la valeur de u_0 et calculer u_1, u_2, u_3 et u_4 .
- b) La suite (u_n) est-elle arithmétique ou géométrique ? Donner sa raison.
- c) Exprimer u_n en fonction de n .

2 Passage à une fonction exponentielle

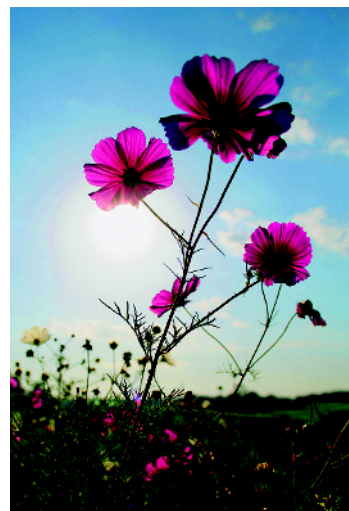
On a vu dans la partie 1 que la hauteur de la plante, en fonction du nombre n de semaines, s'écrit 10^n , avec n nombre entier variant de 0 à 4.

On admet, dans cette partie 2, que l'expression trouvée s'applique à tous les nombres compris entre 0 et 4, entiers ou non.

On définit ainsi, pour une variable t appartenant à l'intervalle $[0 ; 4]$, la fonction h telle que $h(t) = 10^t$.

a) On veut calculer la hauteur de la plante au bout d'une semaine et demie.

- Quelle est alors la valeur de t ? Donner la réponse sous la forme d'un nombre décimal.
- Remplacer t par sa valeur dans $h(t)$ et utiliser la touche « puissance » de la calculatrice (\wedge ou x^y ou...) pour effectuer le calcul. Arrondir à l'unité.
- Répondre à la question par une phrase.



Vous verrez page 183 une explication détaillée de la construction d'une telle fonction.

- b) On veut calculer la hauteur de la plante au bout de 6 jours.**
- Quelle est alors la valeur de t ? Donner la réponse sous la forme d'une fraction.
 - Remplacer t par sa valeur dans $h(t)$ et calculer. Arrondir à l'unité.
 - Répondre à la question par une phrase.
- La fonction, définie pour tout nombre t , par $t \mapsto 10^t$ est appelée **fonction exponentielle de base 10**.

Activité 2 Découvrir la fonction logarithme décimal



Ouvrir le fichier « 13_log.ggb ».

1 Quand l'abscisse devient l'ordonnée et inversement

Soit f la fonction exponentielle de base 10 définie pour tout x par $f(x) = 10^x$.
La courbe tracée en bleu est la courbe représentative de la fonction f , notée C_f .
Le point M de coordonnées $(x_M; y_M)$ se déplace sur la courbe C_f à l'aide de la souris.

- a)** Lire graphiquement le sens de variation de f .
b) Déplacer le point M pour donner la valeur arrondie au dixième de $10^{0,2}$ et $10^{-0,2}$.

On considère le point N de coordonnées $(y_M; x_M)$.
Par exemple, si $M(0,32; 2,09)$, alors $N(2,09; 0,32)$.

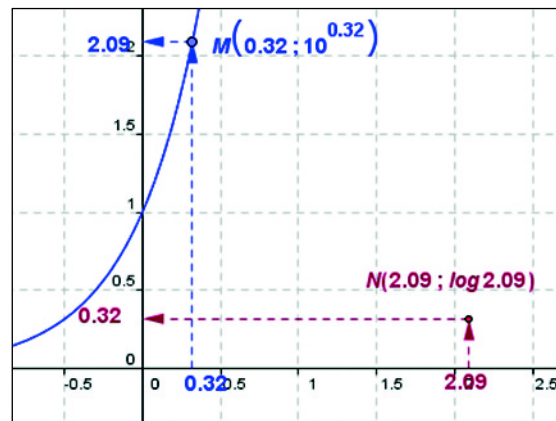
- c)** Faire apparaître le point N à l'écran en cochant la case Point N . Vérifier que la trace de N est activée et déplacer le point M .

Décrire ce que l'on observe.

La trace que l'on obtient est la courbe représentative d'une nouvelle fonction, la **fonction logarithme décimal, notée log**.

Par exemple : on a $10^{0,32} \approx 2,09$; on en conclut que $\log 2,09 \approx 0,32$.

- d)** Écrire trois autres phrases sur ce modèle en utilisant les valeurs données par le logiciel.



2 Fonction logarithme décimal

- a)** Calculer $\log 18$ et $\log 2\,570$ en utilisant la touche $\boxed{\log}$ de la calculatrice. Arrondir au centième.
- b)** Représenter graphiquement sur la calculatrice la fonction \log pour x variant de 0 à 10.
- c)** Lire graphiquement le sens de variation de la fonction \log .
- d)** Construire le tableau de valeurs ci-contre sur la calculatrice en prenant $y_1 = 10^x$ et $y_2 = \log(10^x)$.
Faire varier x de -3 à 3 avec un pas de $0,4$.
- e)** Quelle conjecture peut-on faire concernant la valeur de $\log(10^x)$?

X	Y1	Y2
-2.2	6.3E-3	-2.2
-1.8	0.0158	-1.8
-1.4	0.0398	-1.4
-1	0.1	-1

Activité 3 Écrire le logarithme d'un produit

- a)** Calculer $\log(4 \times 9)$, $\log 4$ et $\log 9$.
- b)** Trouver une relation liant les trois nombres.
- Plus généralement, pour $a > 0$ et $b > 0$, on peut montrer que **$\log(a \times b) = \log a + \log b$** .

1 Fonction exponentielle de base q

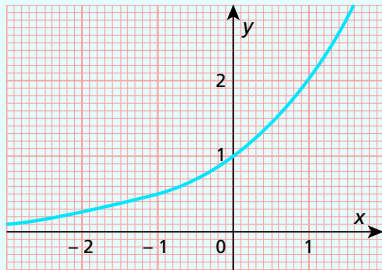
Soit q un nombre strictement positif.

- La fonction exponentielle de base q est la fonction définie pour tout nombre x par $x \mapsto q^x$.
- Sens de variation
Si $q > 1$, alors la fonction est croissante. Si $0 < q < 1$, alors la fonction est décroissante.

Exemples

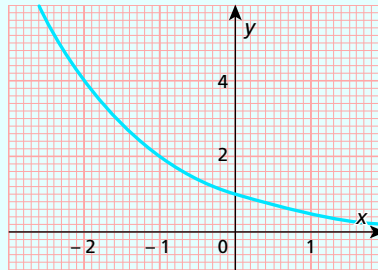
$$f(x) = 2^x$$

La fonction f est croissante.



$$g(x) = 0,5^x$$

La fonction g est décroissante.



- Propriétés algébriques

Ce sont celles des puissances d'exposant entier.

Soient x et y deux nombres quelconques et q un nombre strictement positif.

$$q^x \times q^y = q^{x+y}; \frac{q^x}{q^y} = q^{x-y}; (q^x)^y = q^{x \times y}$$

Exemples

$$2^{-4} \times 2^{1,5} = 2^{-2,5}; \frac{0,1^3}{0,1^{1,8}} = 0,1^{1,2}; (3^{0,4})^{-2} = 3^{-0,8}$$

2 Fonction logarithme décimal

- Le logarithme décimal d'un nombre a strictement positif est le nombre b tel que $10^b = a$.

Il est noté $\log a$.

Valeurs particulières : $\log 1 = 0$; $\log 10 = 1$; $\log 100 = 2$; $\log 1\,000 = 3$.

- Pour $a > 0$, si $\log a = b$, alors $a = 10^b$. Si $10^b = a$, alors $b = \log a$.

Exemples

Si $\log x = 7$, alors $x = 10^7$. Si $10^x = 4$, alors $x = \log 4$.

- La fonction logarithme décimal $x \mapsto \log x$ est définie pour tout nombre x strictement positif. Elle est croissante sur $]0; +\infty[$.

Si $0 < x \leq 1$, alors $\log x$ est négatif. Si $x \geq 1$, alors $\log x$ est positif.

- Propriétés algébriques

a et b sont deux nombres strictement positifs ; x est un nombre quelconque.

$$\log(a \times b) = \log a + \log b; \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b; \log(a^x) = x \times \log a$$

Exemples

$$\log 3 + \log 5 = \log(3 \times 5) = \log 15; \log(10^5) = 5; \log(2^{1,5}) = 1,5 \log 2$$

1 Comment appliquer les propriétés opératoires du logarithme décimal ?

Énoncé

- a) Exprimer, en fonction de $\log x$, $\log (3x^5)$ où x est un nombre strictement positif.
- b) Écrire, à l'aide de $\log 3$, $\log 9 - 4 \log 3$.
- c) Montrer que $\log 0,5 = -\log 2$.

Solution

- a) $\log (3x^5) = \log 3 + \log (x^5) = \log 3 + 5 \log x$
 - b) $\log 9 - 4 \log 3 = \log (3^2) - 4 \log 3$
 $= 2 \log 3 - 4 \log 3 = -2 \log 3$
 - c) $\log 0,5 = \log \left(\frac{1}{2}\right) = \log 1 - \log 2 = 0 - \log 2$
 $= -\log 2$
- ...> Identifier la ou les formules à appliquer.
 ...> Calculer lorsque c'est possible.

2 Comment résoudre une équation du type $q^x = a$ et $\log x = a$, ou une inéquation du type $q^x \geq b$?

Énoncé

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

- a) $5^x = 18$
- b) $0,2^x > 10$
- c) $\log x = -2,5$

Solution

- a) $5^x = 18$
 équivaut à : $\log (5^x) = \log 18$
 équivaut à : $x \log 5 = \log 18$
 équivaut à : $x = \frac{\log 18}{\log 5}$.
 La valeur arrondie au dixième de la solution est 1,8.
 - b) $0,2^x > 10$
 équivaut à : $\log (0,2^x) > \log 10$
 équivaut à : $x \log 0,2 > \log 10$
 équivaut à : $x < \frac{1}{\log 0,2}$.
 Les solutions sont les nombres inférieurs à $-1,43$.
 - c) $\log x = -2,5$
 équivaut à : $x = 10^{-2,5}$.
 La valeur arrondie au millièm de la solution est 0,003.
- ...> Prendre le logarithme décimal de chaque membre.
 ...> Appliquer la propriété : pour $a > 0$, $\log (a^x) = x \log a$.
 ...> Prendre le logarithme décimal de chaque membre sans changer le sens de l'inéquation car la fonction \log est croissante.
 ...> Appliquer la propriété : pour $a > 0$, $\log (a^x) = x \log a$.
 ...> Changer le sens de l'inéquation lorsqu'on divise par $\log 0,2$ qui est négatif.
 ...> Utiliser la propriété du cours : pour $a > 0$, si $\log a = b$, alors $a = 10^b$.

3 Comment exploiter une courbe tracée sur un papier semi-logarithmique ?

Énoncé

L'évolution d'une population de bactéries dans un milieu de culture, exprimée en millions, a été mesurée expérimentalement en fonction du temps en heures.

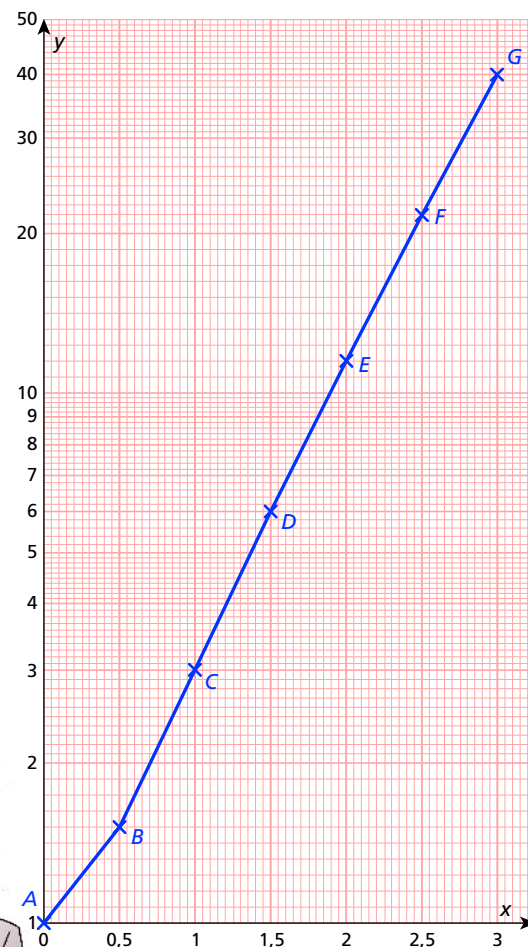
Les résultats ont été reportés sur le graphique ci-contre réalisé sur du papier semi-logarithmique. L'axe des ordonnées a été gradué suivant une échelle logarithmique : la mesure de l'ordonnée n'est pas la valeur elle-même, mais son logarithme.

Exemple : au bout d'une heure, il y a 3 millions de bactéries ; la mesure de l'ordonnée sur le graphique est $\log 3$.

a) Quel est le nombre de bactéries au début de l'expérience ?

b) Compléter le tableau ci-dessous à l'aide du graphique.

t (en heures)	0	0,5	1	1,5
Nombre de bactéries (en millions)				
t (en heures)	2	2,5	3	
Nombre de bactéries (en millions)				



Le papier semi-logarithmique permet de représenter des valeurs qui ont une grande amplitude de variation, sans que les faibles valeurs soient « écrasées ».

c) Pourquoi les différences d'ordonnée $y_D - y_C$ et $y_E - y_D$ ont-elles la même mesure sur le graphique ?

d) Quelle est la conséquence pour les points C, D, E ?

Solution

a) Il y a 1 million de bactéries au départ.

b)

t (en heures)	0	0,5	1	1,5
Nombre de bactéries (en millions)	1	1,6	3	6
t (en heures)	2	2,5	3	
Nombre de bactéries (en millions)	12	22	40	

c) $y_D - y_C = \log 6 - \log 3 = \log \left(\frac{6}{3} \right) = \log 2$

$y_E - y_D = \log 12 - \log 6 = \log \left(\frac{12}{6} \right) = \log 2$

d) Les points C, D et E sont alignés et D est le milieu de [CE].

Lire l'ordonnée du point d'abscisse 0.

Lire les ordonnées écrites sur le graphique.

Calculer les différences d'ordonnées avec les logarithmes.

Remarquer que l'on a aussi $x_D - x_C = x_E - x_D = 0,5$.



Construire une fonction exponentielle à partir d'une suite géométrique

À l'instant $t = 0$, on injecte dans le sang d'un patient une dose de 1 centilitre d'un médicament à action rapide. On considère que le corps élimine chaque heure 50 % du médicament.

On étudie la quantité de médicament dans le sang pendant 6 heures et on se propose de la calculer au bout d'une heure et demie et au bout de 3 heures et quart.

1 Modélisation de la situation par une suite

On note u_0 la quantité de médicament au moment de l'injection, u_1 celle au bout d'une heure, u_2 celle au bout de 2 heures, etc.

On appelle (u_n) la suite $(u_0, u_1, u_2, \dots, u_6)$. C'est une suite géométrique.

a) Donner la valeur de u_0 et la raison de la suite.

b) Calculer u_2 et u_5 .

2 Représentation de la suite

a) Construction du premier tableau

Sur une feuille de calcul, construire le tableau qui permet de calculer les termes de la suite (u_n) . Pour cela :

• Entrer en B2 la formule $=0,5^A2$ et la recopier jusqu'en B8.

b) Construction du graphique

• Sélectionner les cellules de A2 à B8.

• Cliquer sur l'icône de l'Assistant graphique et choisir *Nuage de points*.

	A	B
1	n	$0,5^n$
2	0	1,000000
3	1	0,500000
4	2	0,250000
5	3	0,125000
6	4	0,062500
7	5	0,031250
8	6	0,015625

3 Première dichotomie

Dichotomie signifie : division en deux parties égales. Nous allons prendre le milieu de chaque intervalle entre les abscisses entières afin d'obtenir $t = 0,5$; $t = 1,5$; ...

On s'intéresse à l'ordonnée des points d'abscisse 0,5 ; 1,5 ; ...

a) Calcul préliminaire

Notons y la quantité de médicament au bout d'une demi-heure, donc pour $t = 0,5$. On veut que la suite u_0, y, u_1 soit géométrique.

• Justifier l'égalité $y^2 = u_0 \times u_1$.

• Calculer l'ordonnée y du point d'abscisse 0,5.

b) Deuxième tableau

On généralise le calcul précédent à toutes les ordonnées des « points milieux ».

• Entrer en D3 la formule $=(A2+A3)/2$ et la recopier jusqu'en D8.

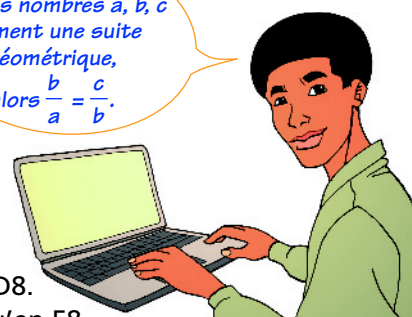
• Entrer en E3 la formule $=\text{RACINE}(B2*B3)$ et la recopier jusqu'en E8.

c) Retour au graphique

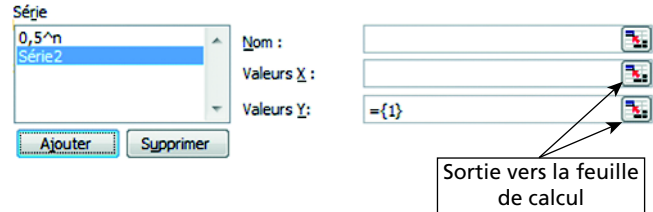
Nous allons compléter le graphique précédent par les six nouveaux points trouvés.

• Cliquer sur le graphique avec le bouton droit de la souris. Choisir *Données source*, puis sous l'onglet *Série*, cliquer sur *Ajouter*.

Si trois nombres a, b, c forment une suite géométrique, alors $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$.



- À la rubrique *Valeurs X*, cliquer sur l'icône de droite et sélectionner les cellules D3 à D8 sur la feuille de calcul. Cliquer à nouveau sur l'icône de droite.
- Procéder de même pour compléter la rubrique *Valeurs Y* avec les valeurs des cellules E3 à E8.



- Répondre à la première question : quelle est la quantité de médicament dans le sang au bout d'une heure et demie ?

4 Deuxième dichotomie

Nous allons à nouveau « couper en deux » les intervalles entre les abscisses afin d'obtenir $t = 0,25$; $t = 0,75$; $t = 1,25$; etc., et calculer les ordonnées correspondantes.

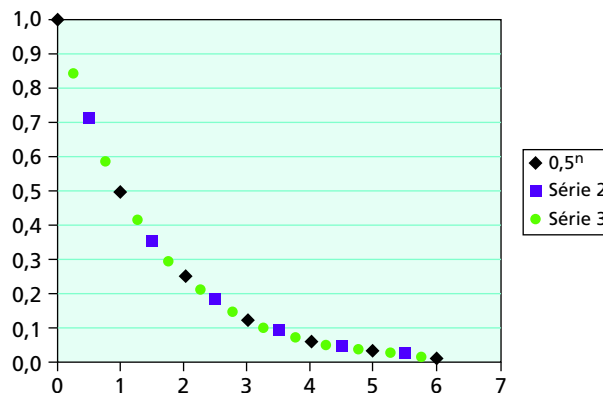
a) Troisième tableau

- Entrer en G3 la formule $=(A2+D3)/2$ et la recopier jusqu'en G8.
- Entrer en H3 la formule $=\text{RACINE}(B2 \cdot E3)$ et la recopier jusqu'en H8.
- Entrer en G9 la formule $=(A3+D3)/2$ et la recopier jusqu'en G14.
- Entrer en H9 la formule $=\text{RACINE}(B3 \cdot E3)$ et la recopier jusqu'en H14.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	n	$0,5^n$		x	y		x	y
2	0	1,000000						
3	1	0,500000		0,5	0,70711		0,25	0,84090
4	2	0,250000		1,5	0,35355		1,25	0,42045
5	3	0,125000		2,5	0,17678		2,25	0,21022

b) Retour au graphique

- Compléter le graphique précédent par les douze nouveaux points trouvés en procédant comme dans la partie 3.c).



Commencez par déterminer la valeur de t .

- Répondre à la deuxième question : quelle est la quantité de médicament dans le sang au bout de trois heures et quart ?

5 Courbe exponentielle

En répétant le processus précédent plusieurs fois, on obtiendrait des points de plus en plus serrés, prenant l'aspect de la courbe représentative d'une fonction.

- Pour tracer cette courbe, cliquer avec le bouton droit sur un des premiers points placés.
- Choisir *Ajouter une courbe de tendance...*, puis sous l'onglet *Type*, sélectionner *Exponentielle*.

La courbe tracée représente la fonction $x \mapsto 0,5^x$ pour $x \geq 0$.

Exercices et problèmes

R Exercices avec réponses en fin d'ouvrage

/* Exercices plus difficiles

Exercices

Calculer un logarithme décimal

1 Calculer $\log x$ pour les valeurs suivantes de x . Arrondir les résultats au centième si nécessaire.
1 000 ; 0,01 ; 10^{-5} ; 10^6 ; 17,2 ; 0,99.

R 2 Effectuer les calculs suivants. Arrondir les résultats au centième.

$$\log 3,2 ; \log \left(\frac{1}{5}\right) ; \log (6 \times 10^3).$$

3 Parmi les calculs suivants, quels sont ceux qui sont impossibles ?
 $-\log 15$; $\log (-4)^2$; $\log (-5^2)$; $\log \sqrt{14}$; $\log (10^{-7})$.

R 4* Parmi les nombres suivants, quels sont ceux qui sont positifs ? Négatifs ?

$$\log (10^3) ; \log \left(\frac{2}{3}\right) ; \log (10^{-2}) ; \log 8,2 ; \log (-5)^2 ;$$

$$\log 0,9 ; \log 1,05.$$

Appliquer les propriétés opératoires du logarithme décimal

5 Calculer sans utiliser la calculatrice.
 $\log (10^8)$; $\log (10^{-1})$; $\log (10^{3,7})$; $\log (10^{-0,8})$.

6 Exprimer à l'aide de $\log 2$: $\log 16$; $\log 20$;
 $\log (2 \times 10^{-5})$; $3 \log 8 - 7 \log 4$; $\log \left(\frac{1}{2}\right)$;
 $\log (2 \times 10^7) + \log 2$.

R 7 On donne $\log 2 = 0,301$; $\log 3 = 0,477$;
 $\log 5 = 0,699$.
Sans utiliser la touche **log** de la calculatrice, calculer
 $\log 6$; $\log 15$; $\log 50$; $\log 1,5$; $\log 2,5$; $\log 300$.

8 Écrire en fonction de $\log x$, pour $x > 0$, les expressions suivantes.

$$\log (1,5x^4) ; \log \left(\frac{x}{4}\right) ; \log (10x) - 5 \log x.$$

Calculer une exponentielle

9 Calculer les nombres suivants. Arrondir les résultats au centième si nécessaire.
 10^5 ; 10^{-4} ; $10^{2,1}$; $10^{-1,8}$; $0,5^3$; $0,5^{-2}$; $0,5^{1,6}$; $0,5^{-0,7}$.

10 Calculer les nombres suivants. Arrondir les résultats au centième si nécessaire.
 $3^{2,5}$; 2^{-4} ; $0,6^{3,5}$; $7^{-0,8}$; $1,5^{4,3}$.

Appliquer les propriétés opératoires d'une exponentielle

11 Écrire plus simplement.

$$10^{-3} \times 10^{5,1} ; \frac{10^4}{10^{3,1}} ; 10^{-9} \times 10 ; (10^{-1,4})^2.$$

R 12 Exprimer en fonction de 10^x .
 10^{x+1} ; 10^{2-x} ; $10^{2x+0,5}$.

Résoudre une équation ou une inéquation du type $q^x = a$ ou $q^x \leq a$

13 Rechercher l'entier n tel que :
 $10^n = 100\,000$; $10^n = 0,000001$; $0,5^n = 0,03125$.

14 Résoudre les équations :
 $3^x = 147$; $5 \times 1,2^x = 15$; $10^x + 28 = 157$;
 $0,5^x = 0,1$; $10^{x+1} = 23$.

R 15* Résoudre les inéquations :
 $10^x < 50$; $6,1^x \geq 472,3$; $0,5^x \leq 0,48$; $10^{-6x} > 10^{-3}$.

16* Un capital de 20 000 € est placé à intérêts composés au taux de 3,5 %. Les intérêts sont capitalisés à la fin de chaque année. La valeur acquise au bout de n années est donnée par la relation :
 $C_n = 20\,000 \times 1,035^n$.

a) Calculer la valeur acquise au bout de 5 ans.

b) Au bout de combien d'années le capital est-il égal à 29 200 € ?

c) Au bout de combien d'années le capital a-t-il doublé ?

R 17* Une entreprise achète une machine neuve dont le prix est de 84 000 €. On estime qu'elle se déprécie de 12 % par an. La valeur V_n de la machine au bout de n années est donnée par $V_n = 84\,000 \times 0,88^n$.

a) Calculer la valeur de la machine au bout de deux ans.

b) Au bout de combien d'années la valeur de la machine est-elle inférieure à 60 000 € ?

c) Au bout de combien d'années la machine a-t-elle perdu la moitié de sa valeur ?

Résoudre une équation ou une inéquation du type $\log x = a$ ou $\log x \geq a$

18 Résoudre les équations suivantes.
 $\log x = 2,5$; $\log x = -4$; $2 \log x = 10$; $4 \log x - 1 = -11$.

R 19* Résoudre les inéquations suivantes.
 $\log x > 2$; $\log x \leq 8$; $2 \log x + 3 < 13$; $4 - \log x \geq 12$.

Étudier une fonction logarithme décimal

20 a) Rappeler le sens de variation de la fonction logarithme décimal.

b) En déduire le sens de variation des fonctions f_1, f_2, f_3, f_4 suivantes définies pour tout nombre x positif, sans calculer leur dérivée. Justifier.

$$f_1(x) = \log(4x) ; f_2(x) = -2 \log x ;$$

$$f_3(x) = 5 \log(x^3) ; f_4(x) = -\log(x^2) + 5.$$

Étudier une fonction comportant une exponentielle de base 10

21 a) Rappeler le sens de variation de la fonction exponentielle de base 10.

b) En déduire le sens de variation des fonctions f_1, f_2, f_3, f_4 suivantes définies pour tout nombre x , sans calculer leur dérivée. Justifier.

$$f_1(x) = 0,6 \times 10^x ; f_2(x) = -10^x ;$$

$$f_3(x) = 10^x - 5 ; f_4(x) = -4 \times 10^x + 2,7.$$

Problèmes

Problème 1

Assurance-vie et taux de mortalité

Madame Prévo, 45 ans, désire prendre une assurance-vie sur 18 ans au profit de ses petits-enfants. Pour accepter ou non le dossier de madame Prévo, l'assureur utilise la loi de survie de Makeham. On admet que cette loi est approchée par la fonction V définie par :

$$V(x) = 110\,545 \times 0,995^x$$

où $V(x)$ représente, au bout de x années, avec $x \geq 45$, le nombre de survivants dans un échantillon de 100 000 individus nés la même année que madame Prévo.

1. Madame Prévo a aujourd'hui 45 ans et aura 63 ans dans 18 ans. En utilisant l'expression $V(x) = 110\,545 \times 0,995^x$, calculer pour cet échantillon :

a) $V(45)$, le nombre probable de survivants âgés de 45 ans ;

b) $V(63)$, le nombre probable de survivants âgés de 63 ans.

Chaque résultat sera arrondi à l'unité.

2. Calculer le nombre de décès entre 45 et 63 ans. En déduire le taux de mortalité de cet échantillon sur cette période. Le résultat sera arrondi à 1 %.

3. Si le taux de mortalité de l'échantillon d'âge auquel appartient un candidat est inférieur à 20 %, alors l'assureur accepte le dossier.

L'assureur va-t-il accepter celui de madame Prévo ? Justifier la réponse.

Tables de décès

Les assureurs utilisent, entre autres, pour proposer leurs produits financiers, les tables de décès (ou de survie). C'est un outil qui permet de suivre le destin d'une population.

Une telle table est établie à partir de l'observation d'une population importante, souvent 100 000 individus.

Une table de décès présente pour chaque âge x qu'elle contient :

- soit un nombre d'individus vivants, par convention noté l_x ,
- soit une probabilité de décès dans l'année, notée q_x ,
- soit une espérance de vie, notée e_x .

âge x	l_x nbr de vivants	âge x	l_x nbr de vivants	âge x	l_x nbr de vivants
0	100 000	38	98 435	76	79 402
1	99 616	39	98 343	77	77 633
2	99 583	40	98 242	78	75 671
3	99 562	41	98 130	79	73 496
4	99 545	42	98 007	80	71 088

Ceci est un extrait de la table TF 00-02 qui concerne les femmes et construite à partir de la table de l'INSEE 2000-2002.

Problème 2

Charges d'une entreprise

Le comptable d'une entreprise de transport réalise une étude prévisionnelle des charges de l'entreprise entre 2011 et 2016.

1. Le montant des charges de l'entreprise pour l'année 2011 est 200 000 €.

On estime que le montant des charges diminue de 5 % par an jusqu'en 2016.

a) Calculer le montant des charges en 2012, 2013, 2014.

b) Les montants des charges de 2011 à 2014 sont les premiers termes d'une suite de nombres.

– Déterminer la nature de la suite. Justifier la réponse.

– Déterminer le premier terme et la raison de cette suite.

2. Le montant y , en euros, des charges de l'entreprise est donné en fonction du rang n de l'année par :

$$y = 200\,000 \times 0,95^n.$$

$n = 0$ est le rang de l'année 2011, $n = 1$ est celui de l'année 2012, etc.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 6]$ par $f(x) = 200\,000 \times 0,95^x$.

- Tracer la courbe représentative de f sur la calculatrice.
- Utiliser les fonctionnalités de la calculatrice pour déterminer graphiquement en quelle année le montant des charges sera de 147 000 €.
- Retrouver le résultat par le calcul en résolvant l'équation $200\,000 \times 0,95^x = 147\,000$.

Problème 3

Comparaison d'évolution de deux types de charges

Le responsable d'un établissement souhaite comparer l'évolution des charges de personnel et des charges de sous-traitance à l'aide des données suivantes.

Années	1	2	3	4	5
Charges de personnel (en €)	7 800	8 800	10 500	12 900	15 400
Charges de sous-traitance (en €)	1 400	1 600	2 000	3 100	5 500

- Reproduire ce tableau sur la feuille de calcul d'un tableur.
 - Dans le même repère orthogonal, représenter ces données par deux nuages de points à l'aide de l'Assistant graphique du tableur. Choisir Nuage de points reliés par une courbe lissée.
 - Quelles sont les charges qui semblent augmenter le plus rapidement ?
 - Calculer le pourcentage d'augmentation des charges de personnel entre l'année 1 et l'année 5.
 - Même question pour les charges de sous-traitance.
 - Ces calculs confirment-ils l'impression laissée par le graphique ? Conclusion.
- On va utiliser une échelle logarithmique en ordonnées.
 - Copier le graphique obtenu précédemment. Mettre les deux graphiques côte à côte.
 - Dans un des graphiques, effectuer un clic droit sur l'axe des ordonnées. Dans la fenêtre *Format de l'axe*, ouvrir l'onglet *Échelle*. Cocher *Échelle logarithmique* et prendre un minimum de 1 000.
 - Les points qui représentent les charges en personnel sont presque alignés. Qu'est-ce que cela signifie dans cette situation ?
 - Qu'indique ce graphique sur la vitesse d'évolution des charges de maintenance ?

- Conclure sur la comparaison de l'évolution des charges de personnel et de sous-traitance.

Problème 4

Niveau sonore

Dans un atelier, l'entreprise réalise une étude concernant les nuisances sonores dues au fonctionnement de trois machines identiques. Le niveau sonore L d'un bruit, exprimé en décibels (dB), est donné par la relation

$$L = 10 \times \log \left(\frac{I}{I_0} \right). \quad I \text{ est l'intensité acoustique, exprimée}$$

en watts par m^2 (W/m^2). I_0 est l'intensité correspondant au seuil d'audibilité (intensité la plus faible perçue par l'oreille pour un être humain) avec $I_0 = 10^{-12} W/m^2$.

- Une seule machine est en fonctionnement. L'intensité acoustique est alors $I = 2 \times 10^{-4} W/m^2$.
 - Vérifier que le niveau sonore pour cette machine peut s'écrire : $80 + 10 \log 2$.
 - Calculer la valeur de L arrondie à 0,1 dB.
- Les trois machines sont en fonctionnement. L'intensité acoustique est alors égale à $3I$. Calculer l'augmentation du niveau sonore.

Problème 5

Le pH en chimie



Le pH d'une solution mesure son acidité. Par définition, $pH = -\log x$ où x désigne la concentration en ions H_3O^+ exprimée en moles par litre.

- La concentration en ions H_3O^+ d'une solution est $3,5 \times 10^{-4}$ mole par litre. Calculer le pH de cette solution. Arrondir au dixième. La solution est-elle acide ou basique ?
- Le pH d'une solution est 9. Donner la concentration en ions H_3O^+ . La solution est-elle acide ou basique ?

Le pH

C'est le chimiste danois Soren Sorensen qui proposa cette échelle de mesure du degré d'acidité d'une solution en 1909.

Le pH peut varier de 0 à 14.

Un pH de 7 correspond au pH neutre ; c'est le pH de l'eau distillée. Une solution de pH inférieur à 7 est acide.

Une solution de pH supérieur à 7 est basique.

Le jus de citron a un pH de 2,9. L'eau de mer a un pH de 8,3.

Problème 6

Coût d'entretien d'un équipement



L'étude du coût annuel d'entretien et de réparation C d'un équipement d'âge t , durant les cinq premières années, a conduit à établir le tableau suivant.

Âge t_i (en années)	1	2	3	4	5
Coût C_i (en centaines d'euros)	13,3	14,2	16,1	18,9	23,6

L'objectif de l'activité est de donner une estimation du coût d'entretien et de réparation de cet équipement lorsqu'il aura 7 ans.

Ouvrir le fichier « 13_cout.xls » ou « 13_cout.ods ».



1. Premier nuage de points

Dans cette partie, travailler sur la feuille 1 du classeur.

a) • Sélectionner les cellules A1 à F2, puis cliquer sur l'icône de l'Assistant graphique.

• Choisir *Nuage de points reliés par une courbe lissée*.

b) Un ajustement de ce nuage par une droite semble-t-il adapté ?

c) • Choisir une échelle logarithmique pour l'axe des ordonnées : effectuer un clic droit sur cet axe. Dans *Format de l'axe*, ouvrir l'onglet *Échelle* et cocher *Échelle logarithmique*.

• Que devient le nuage de points ?

2. Deuxième nuage de points

Dans cette partie, travailler sur la feuille 2 du classeur.

On va construire un nouveau nuage de points en portant en ordonnée, non plus C_i , mais $\log(C_i)$.

On pose $z_i = \log(C_i)$.

a) Pour compléter le tableau donnant les valeurs de z_i , entrer dans la cellule B3 la formule $=\log(B2)$. La recopier jusqu'à F3.

b) Sélectionner les lignes 1 et 3, en appuyant sur la touche Ctrl entre les deux lignes. Cliquer sur l'icône de l'Assistant graphique. Choisir *Nuage de points reliés par une courbe lissée*.

c) Un ajustement de ce nuage par une droite semble adapté.

• Effectuer un clic droit sur l'un des points du nuage et sélectionner *Ajouter une courbe de tendance*.

• Choisir le type *Linéaire*, puis dans Options *Afficher l'équation sur le graphique*.

d) En utilisant l'équation précédente, calculer $\log(C_7)$ en remplaçant x par 7.

e) En déduire le coût d'entretien et de réparation C_7 de cet équipement lorsqu'il aura 7 ans.

Problème 7

Valeur d'un véhicule



Un transporteur achète en 2011 un véhicule fourgon de 9 tonnes au prix de 50 200 euros, taxes comprises. Compte tenu du nombre de kilomètres parcourus, on considère que le véhicule perd 20 % de sa valeur chaque année.

La perte de chaque année est calculée sur la valeur résiduelle de l'année précédente.

Partie A. Étude d'une situation

1. Calculer la valeur résiduelle du fourgon en 2012, 2013, 2014.

2. Les valeurs du véhicule en 2011, 2012, 2013, 2014 forment une suite de nombres. Préciser la nature et la raison de cette suite de nombres.

3. Donner l'expression de la valeur résiduelle V_n du véhicule pour l'année n , en prenant $n = 0$ pour l'année 2011.

Partie B. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0 ; 10]$ par $f(x) = 50\,200 \times 0,8^x$.

1. Donner le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 10]$. Justifier.

2. a) Sur la calculatrice, construire la table de valeurs de la fonction f pour x variant de 0 à 10 avec un pas de 1.

b) À l'aide de cette table, donner $f(0)$, $f(5)$, $f(10)$.

3. Sur la calculatrice :

a) Tracer la courbe représentative de f sur $[0 ; 10]$.

b) Tracer la droite d'équation $y = 12\,500$.

c) Déterminer graphiquement la valeur de x pour laquelle $f(x) = 12\,500$.

Partie C. Exploitation des résultats

Le propriétaire du véhicule fourgon décide qu'il faut remplacer ce véhicule lorsque sa valeur est inférieure à 12 500 euros.

Avec l'aide de l'étude précédente, déterminer l'année au cours de laquelle il remplacera le véhicule.

Je teste mes connaissances

Sur le CD-Rom :
– le QCM sous forme interactive
– des exercices supplémentaires
pour vous entraîner.



Pour chaque énoncé, indiquer la ou les bonnes réponses.

	A	B	C
1 La valeur arrondie au millième de $10^{-1,5}$ est :	- 15	0,032	31,623
2 La valeur arrondie au centième de $0,5^{2,8}$ est :	0,144	1,4	0,14
3 $\frac{10^{-2,1} \times 10^4}{10^{-0,5}} = ?$	$10^{2,4}$	$10^{1,4}$	$10^{16,8}$
4 La solution de l'équation $10^x = 4$ est :	10^4	10^{-4}	$\log 4$
5 L'inéquation $0,5^x \geq 2$ est équivalente à l'inéquation :	$x \leq -1$	$x \geq \frac{\log 2}{\log 0,5}$	$x \leq 4$
6 $\log(10^{-3}) = ?$	- 3	0,001	n'existe pas.
7 $\log(-10^3) = ?$	- 3	1 000	n'existe pas.
8 $\log 4 + \log 6 = ?$	$\log 10$	$\log 24$	$\log 2$
9 La solution de l'équation $\log x = 3,4$ est :	$3,4^{10}$	$\log(3,4)$	$10^{3,4}$
10 L'inéquation $\log(x^2) < 2$ est équivalente à l'inéquation :	$x < 10$	$x > -2$	$x < \sqrt{2}$

Je m'entraîne au CCF

Exercice 1

pH d'une solution

Le pH d'une solution mesure son acidité. Par définition, $\text{pH} = -\log x$ où x désigne la concentration en ions H_3O^+ exprimée en moles par litre.

1. Calculer, avec la calculatrice, le pH d'une solution dont la concentration en ions H_3O^+ est 10^{-5} mole par litre.
2. Quel est le sens de variation de la fonction logarithme décimal ? Lorsque la concentration en ions H_3O^+ augmente, le pH augmente-t-il ou diminue-t-il ?
3. Que fait le pH lorsque la concentration en ions H_3O^+ est divisée par 10 ?
4. Calculer la concentration, en ions H_3O^+ , exprimée en moles par litre, d'une solution dont le pH est 7,2. Donner le résultat sous la forme $a \times 10^n$ où a est un décimal compris entre 0 et 1, et n est un entier.



Appelez le professeur pour présenter votre travail.

Exercice 2

Des souris malades

On administre quotidiennement, pendant 6 semaines, un médicament à une population de 1 000 souris malades. Au bout d'une semaine, on fait un test et on remarque que 50 % des souris sont guéries. On recommence le test chaque semaine. On admet que, chaque semaine, 50 % des souris encore malades à la fin de la semaine précédente sont guéries.

1. Calculer le nombre de souris encore malades à la fin de la 3^e semaine. Détailler le raisonnement.
2. Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 6]$ par $f(x) = 1\,000 \times 0,5^x$.
 - a. Donner le sens de variation de la fonction $x \mapsto 0,5^x$. Justifier.
 - b. En déduire le sens de variation de f . Justifier.
 - c. Résoudre l'équation $f(x) = 400$. Arrondir la solution à l'unité.
3. La fonction f modélise le nombre de souris encore malades après une durée x exprimée en semaines (x n'est pas forcément un nombre entier de semaines).
 - a. Déterminer le nombre de souris guéries dès le premier jour.
 - b. Donner le nombre de jours nécessaires pour que les $\frac{3}{5}$ des souris soient guéries.



Appelez le professeur pour présenter oralement les réponses 3.a. et 3.b.

Capacités	Je sais faire	Je dois encore travailler
Étudier les variations de la fonction logarithme décimal.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Résoudre une équation du type $\log x = a$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Étudier les variations d'une fonction du type $x \mapsto q^x$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Résoudre une équation du type $q^x = a$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>