BAC PRO 3 ans
TERMINALE PROFESSIONNELLE

Mathématiques

Groupement C

I. Baudet, L. Breitbach, P. Dutarte, D. Laurent
Sous la direction de G. Barussaud

CORRIGÉ

les NOUVEAUX cahiers

FOUCHER

Sommaire

ISBN 978-2-216-11610-2

5. Fonctions exponentielles et logarithme décimal

6. Primitives (programme complémentaire)

7. Fonction logarithme népérien (programme complémentaire)

8. Fonctions exponentielles (programme complémentaire)

Évaluations vers le Bac pro

Pictogrammes des différents thématiques du programme

Vie économique et professionnelle

Prévention, santé et sécurité

Évolution des sciences et techniques

Développement durable

Vie sociale et loisirs

1 Nuage de points et point moyen

Capacités
- Représenter un nuage de points
- Déterminer le point moyen

(Livre élève pages 5 et 6)

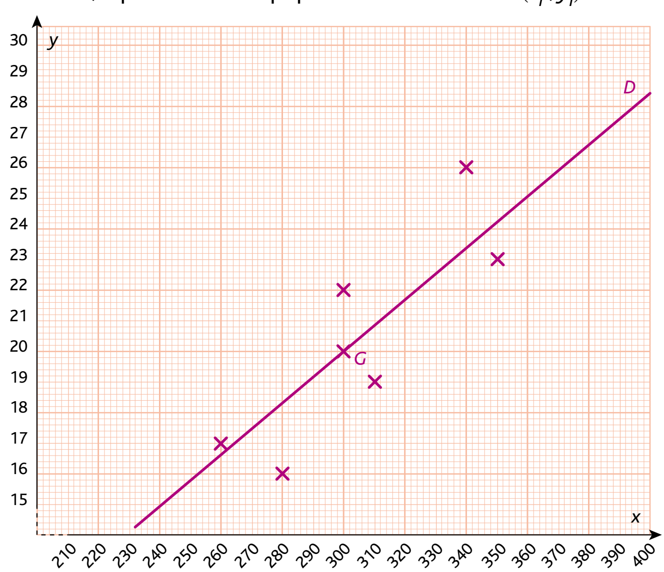
1 Représenter une série par un nuage de points

Évolution de la production et publicité

Le tableau suivant donne, pour sept années consécutives, l'évolution de la production d'un certain type de pièces et des frais de publicité correspondants, dans une entreprise du secteur industriel.

Production (en milliers) : x_i	260	280	260	310	300	350	340
Frais de publicité (en milliers d'euros) : y_i	17	16	17	19	22	23	26

1. Sur le graphique ci-dessous, représenter les sept points de coordonnées $(x_i ; y_i)$.



Les points obtenus forment le **nuage de points**.

2. Décrire ce nuage de points, en cochant une des propositions suivantes :

- ❐ les points du nuage sont éparpillés dans toutes les directions du graphique ;
- ☒ la forme du nuage est plutôt allongée dans une direction ;
- ❐ la forme du nuage est plutôt ronde ;
- ❐ la forme du nuage est plutôt parabolique.

➔2 Déterminer le point moyen et tracer une droite

On reprend l'énoncé précédent.

1. En moyenne…

a. Calculer la moyenne $\overline{x}$ des sept productions (en milliers), puis la moyenne $\overline{y}$ des sept frais de publicité (en milliers d'euros).

$\overline{x}$ = 300 ; $\overline{y}$ = 20.

b. Placer le point G de coordonnées $(\overline{x}\ ;\ \overline{y})$. Comment se situe-t-il par rapport au nuage ?

Le point G se situe « au centre » du nuage.

Le point G se nomme le **point moyen**.

2. On ajuste ce nuage par la droite D d'équation $y = 0{,}084x - 5{,}2$. Vérifier que le point G appartient à la droite D.

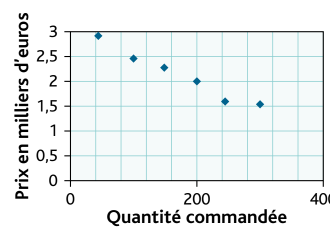
$0{,}084 \times 300 - 5{,}2 = 20$

3. Tracer la droite D sur le graphique de la page précédente.

Comment déterminer le point moyen ?

Le tableau suivant donne le prix de vente d'un article en fonction de la quantité commandée.

Quantité commandée : x_i	50	100	150	200	250	300
Prix en milliers d'euros : y_i	2,8	2,4	2,3	2	1,65	1,6



Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage de points correspondant.

- On calcule la moyenne $\overline{x}$ des valeurs x_i.

  La moyenne des quantités commandées est : $\overline{x} = \dfrac{50+100+150+200+250+300}{6} = 175$

- On calcule la moyenne $\overline{y}$ des valeurs y_i.

  La moyenne des prix est :

  $$\overline{y} = \frac{2{,}8 + 2{,}4 + 2{,}3 + 2 + 1{,}65 + 1{,}6}{6} = 2{,}125$$

Vérifiez sur le graphique que le point moyen est bien « au centre » du nuage !

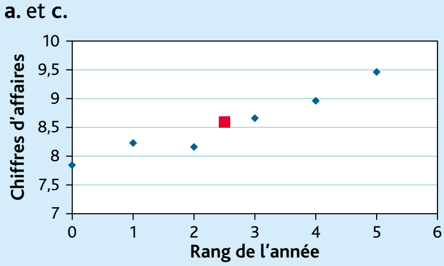
- Le point G a pour coordonnées $(\overline{x}\ ;\ \overline{y})$.

  Les coordonnées de G sont : (175 ; 2,125).

Exercice

RÉPONSES

a. et **c.**



b. On a $\overline{x} = 2{,}5$ et $\overline{y} = 8{,}555$ d'où $G(2{,}5\ ;\ 8{,}555)$.

2 Ajustement affine

Capacités
- Déterminer, à l'aide des TIC, une équation d'une droite d'ajustement
- Utiliser cette équation pour interpoler ou extrapoler

(Livre élève pages 7 et 8)

1 Exploiter une droite d'ajustement

Quel impact des dépenses publicitaires ?

Une entreprise étudie le lien entre ses dépenses publicitaires et son chiffre d'affaires. Elle possède les données suivantes, exprimées en millions d'euros.

Dépenses publicitaires : x_i	0,5	2	2,9	4,5	5,6
Chiffre d'affaires : y_i	35	37	75	92	90

a. Placer dans un repère orthogonal les cinq points correspondant à ces données.

b. Tracer, dans ce même repère, la droite d'équation $y = 12,8x + 26,2$ et vérifier qu'elle passe à proximité des cinq points.

Cette droite se nomme **droite d'ajustement**.

c. Exploiter cette droite d'ajustement pour estimer le chiffre d'affaires correspondant à des dépenses publicitaires de 3,5 millions d'euros.

$r = 11$ ....

$e = 12$ ....

....

2 Déterminer un ajustement affine

Quelle tendance pour les gaz à effet de serre (GES) ?

Le tableau suivant correspond aux émissions de gaz à effet de serre (en millions de tonnes équivalent CO_2) relevées en France (Source : Ifen).

Année	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Émissions GES	565	561	563	554	558	557	561	545	535	532

1. Recherche du point moyen

Calculer les coordonnées $\overline{x}$ (moyenne de la première ligne du tableau) et $\overline{y}$ (moyenne de la seconde ligne) du point moyen G.

$\overline{x} =$ 2 003,5 .... ; $\overline{y} =$ 553,1 ....

2. Détermination d'une droite d'ajustement

a. On souhaite ajuster le nuage de points par une droite D passant par le point G.

On admet que D a pour coefficient directeur – 3,33.

On note $y = -3{,}33x + b$ une équation de D.

Calculer le nombre b.

$553{,}1 = -3{,}33 \times 2\,003{,}5 + b$ d'où $b = 7\,224{,}755$.

b. En supposant que la tendance observée sur ces dix années se poursuive, estimer la quantité d'émissions de gaz à effet de serre en France en 2015.

$-3{,}33 \times 2\,015 + 7\,224{,}755 = 514{,}805$.

Comment ajuster un nuage de points à l'aide d'un tableur ?

Le tableau suivant donne le prix de vente d'un article en fonction de la quantité commandée.

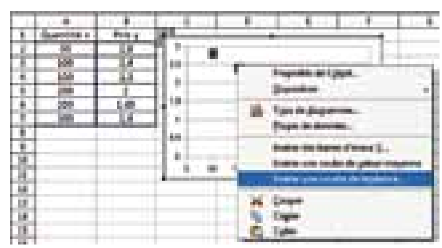
Quantité commandée : x_i	50	100	150	200	250	300
Prix en milliers d'euros : y_i	2,8	2,4	2,3	2	1,65	1,6

Représenter à l'aide d'un tableur le nuage de points correspondant puis en effectuer un ajustement affine.

- **Sélectionner** les données puis :

  – avec Excel 2003, cliquer sur l'icône *Assistant graphique* et choisir *Nuage de points* ; avec Excel 2007-2010, choisir *Insertion/Nuage de points* ;

  – avec OpenOffice Calc, cliquer sur l'icône *Diagramme* puis choisir *XY (dispersion)*.



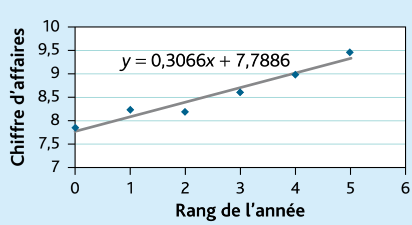
- Cliquer avec le bouton droit sur l'un des points du nuage et choisir *Ajouter une courbe de tendance…* avec Excel ou *Insérer une courbe de tendance…* avec OpenOffice. Choisir *Linéaire* et cocher *Afficher l'équation sur le graphique*.

  On obtient l'équation : $y = -0{,}0049x + 2{,}98$

Exercice

RÉPONSES

a.



b. On peut estimer le chiffre d'affaires en 2011 (année de rang 6) à :
$0{,}3 \times 6 + 7{,}8 = 9{,}6$ millions d'euros.

(Livre élève pages 9 et 10)

3 J'utilise un logiciel (tableur)

Ajuster un grand nombre de données

Capacité de production éolienne

Ouvrir le fichier « **01_prod_eolienne.xls** » ou « **01_prod_eolienne.ods** » fournissant la capacité de production éolienne de 76 pays de 2001 à 2010 (Source : EWEA).

1. Étude de la capacité de production française

a. Sélectionner les données de la France (ou utiliser le filtre « Pays »), puis représenter le nuage de points correspondant.

Pourquoi un ajustement affine a-t-il ici peu de sens ?

La forme du nuage n'est pas une droite.

b. Montrer à l'aide du tableur, qu'en ne retenant que les années de 2005 à 2010 (rangs 5 à 10), on peut ajuster la production française par la droite d'équation $y = 839x - 4\,114$.

c. En supposant que cette tendance se maintienne, estimer la production française en 2013 (rang $x = 13$).

$839 \times 13 - 4\,114 = 6\,793$ MW.

2. Comparaison de l'Europe et de l'Asie

- À l'aide du filtre, sélectionner les données des pays d'Europe, les copier, puis les coller sur une nouvelle feuille.

a. Calculer, pour chaque année, la production totale des pays européens.

b. Effectuer un ajustement affine de la production en Europe de 2001 à 2010 (afficher l'équation).

c. À l'aide de l'équation $y = 6\,815x + 3\,391$, estimer la production européenne en 2013 (rang $x = 13$).

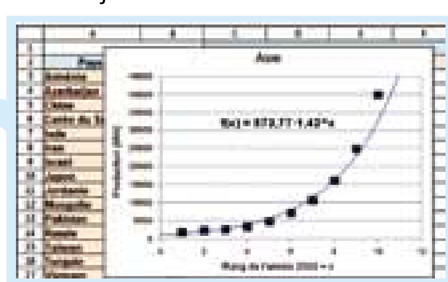
$6\,815 \times 13 + 3\,391 = 91\,986$ MW.

- À l'aide du filtre, copier les données des pays d'Asie, puis les coller sur une nouvelle feuille.

d. Calculer, pour chaque année, la production totale des pays asiatiques.

e. Un ajustement affine de la production en Asie de 2001 à 2010 est-il justifié ?

Non (l'augmentation s'accélère).



f. Le tableur permet d'ajuster le nuage à l'aide d'une « courbe de tendance exponentielle ». En utilisant la formule $973{,}77 \times 1{,}42$ ^ x (le symbole ^ indique la puissance), estimer la production asiatique en 2013 (rang $x = 13$).

$973{,}77 \times 1{,}42^{13} \approx 92\,940$ MW.

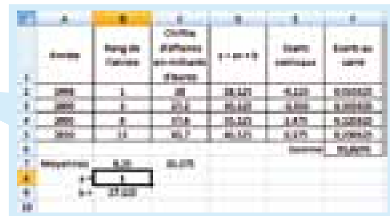
J'utilise un logiciel (tableur)

Comprendre le principe des moindres carrés

Chiffre d'affaires d'un constructeur d'automobiles

1. Principe des « moindres carrés »

Ouvrir le fichier « 01_moindres_carres.xls » ou « 01_moindres_carres.ods », donnant le chiffre d'affaires, en milliards d'euros, d'un constructeur d'automobiles.



On recherche une droite d'équation $y = ax + b$, passant par le point moyen et ajustant « au mieux » le nuage des quatre années données.

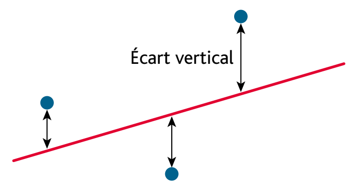
a. Dans quelles cellules sont calculées les coordonnées $(\bar{x}\ ;\ \bar{y})$ du point moyen ?

B7 et C7.

b. Puisque la droite passe par le point moyen, on a $b = \bar{y} - a\bar{x}$. Expliquer la formule entrée en B9.

$\bar{y}$ est en C7 ; $\bar{x}$ en B7 et a en B8.

c. Pourquoi la somme des écarts contenus en colonne E ne permet-elle pas de savoir si la droite est proche des points du nuage et quel est l'avantage de considérer la somme des écarts au carré, en colonne F ?



Les écarts négatifs se soustraient aux écarts positifs.

Les écarts au carré sont tous positifs.

d. Modifier en B8 la première décimale du coefficient directeur a de la droite (prendre 1,1 ; 1,2 ; 1,3…) de sorte à obtenir en F6 une somme des écarts au carré minimale (observer en même temps la droite sur le graphique). Quel est, à 10^{-1} près, le coefficient a optimal ?

$a = 1{,}2$.

A **Appelez le professeur pour exposer votre résultat.**

2. Comparaison avec l'ajustement du tableur

Le tableur peut afficher directement la droite d'ajustement obtenue selon le principe précédent des « moindres carrés ».

a. Quelle est l'équation de la droite d'ajustement donnée par le tableur ?

$y = 1{,}2118x + 25{,}801$.

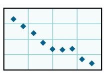
b. Comparer au résultat obtenu à la question 1.d. On a $1{,}2 \approx 1{,}2118$.

A **Appelez le professeur pour exposer vos commentaires.**

Exercices & Problèmes

Exercices p. 13 à 15

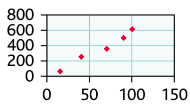
1. QCM

a. 

b. $b = -0,2$

c. Le point moyen est G (6,5 ; 31,575).

d. 49,8

e. 

f. $G(63\,;\,359)$

g. $y = 6,06x - 22,73$.

h. $G(3\,;\,341,8)$

i. $y = 0,8x + 339,4$

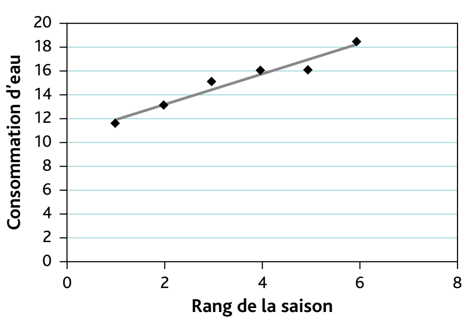
j. 344 200 €

› Exploiter un ajustement affine donné

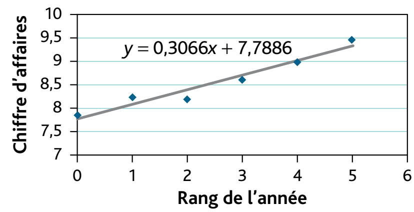
2. On peut estimer l'étendue de la glace dans l'océan Arctique en juin 2050 à :
$-0,0424 \times 2\,050 + 96,522 \times 9,6$ km^2.

3. On a $y = -3,885\,7 \times 2\,020 + 9\,461,3 \approx 1\,612$ m.

4. a. et **b.**



c. On peut estimer la consommation en 2011 (année de rang 10) à :
$1,2 \times 10 + 11 = 23$ millions de m^3.



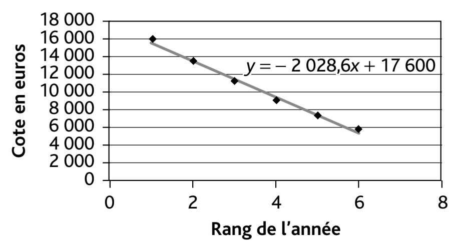
d. On peut estimer le chiffre d'affaires en 2011 (année de rang 6) à :
$0,3 \times 6 + 7,8 = 9,6$ millions d'euros.

› Déterminer un ajustement affine

5. a. La calculatrice donne l'équation :
$y = 0,173\,4x - 339,64$.

b. On peut estimer le SMIC en 2012 à :
$y = 0,173\,4 \times 2\,012 - 339,64 \approx 9,24$ €.

6. a.

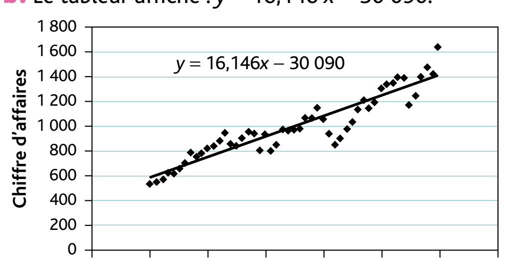


On obtient l'équation : $y = -2\,000x + 17\,600$ en arrondissant les coefficients à la centaine d'euros la plus proche.

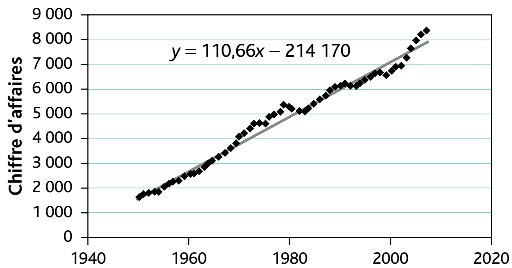
b. L'année 2013 est au rang 8. On peut estimer la cote du véhicule en 2013 à :
$-2\,000 \times 8 + 17\,600 = 1\,600$ euros.

7. a. Un ajustement affine n'est pas justifié car la tendance globale n'est pas celle d'une droite.

b. Le tableur affiche : $y = 16,146\,x - 30\,090$.



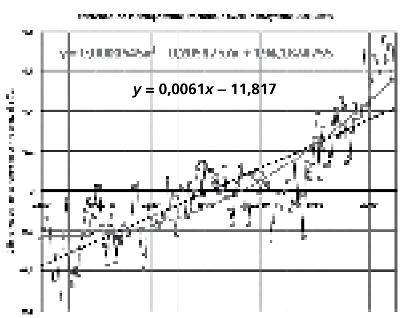
c. Le tableur affiche : $y = 110{,}66\,x - 214\,170$.



d. L'affirmation est exacte. On retrouve les coefficients directeurs des droites d'ajustement, arrondis à l'unité.

› Exploiter un ajustement non affine

8.



a. L'équation affichée par le tableur est :
$y = 0{,}0061x - 11{,}817$.

b. L'ajustement qui semble préférable est l'ajustement par la parabole.

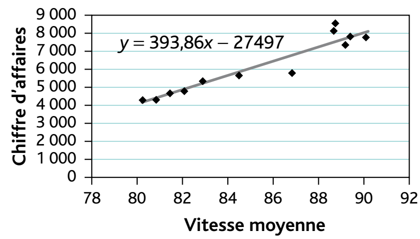
c. Estimation de l'écart de température en 2040
– à l'aide de l'ajustement affine :
$0{,}006\,1 \times 2\,040 - 11{,}817 = 0{,}627$;
– à l'aide de l'ajustement parabolique :
$0{,}000\,054\,5 \times 2040^2 - 0{,}205\,88 \times 2\,040 + 149{,}19 = 1{,}002$.

Problèmes p. 15 et 16

› Problème 1
Vitesse et sécurité routière

1. On peut formuler l'hypothèse que le nombre de morts est lié à la vitesse moyenne.

2. a.



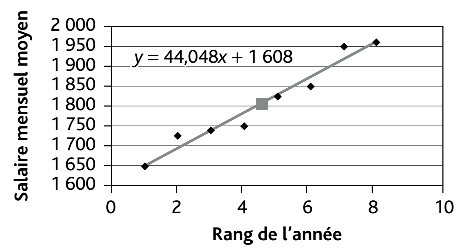
b. Le nuage de points a une forme allongée. On peut envisager un ajustement affine.

3. a. Le tableur fournit l'équation :
$y = 393{,}86x - 27\,497$.

b. Pour une vitesse moyenne de 78 km/h, on peut estimer le nombre de morts à :
$393{,}86 \times 78 - 27\,297 \approx 3\,424$.
Le nombre de vies sauvées serait :
$4\,273 - 3\,424 = 849$ vies.

› Problème 2
Évolution de salaire

1.



2. a. On a $\overline{x} = 4{,}5$ et $\overline{y} = 1\,806{,}25$
d'où $G(4{,}5\ ;\ 1\,806{,}25)$.

b. On obtient : $y = 44x + 1\,608$.

c. Voir le graphique.

3. a. L'année 2014 est au rang 11. On peut estimer le salaire d'Hélène à 2 090 euros environ.

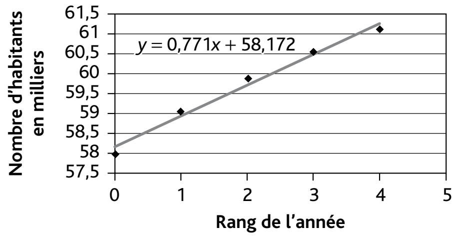
b. L'année 2014 est au rang 16.
On a $44 \times 16 + 1\,608 = 2\,312$. On peut estimer que le salaire d'Hélène n'atteindra pas 2 400 euros en 2019.

› Problème 3
Évolution d'une population

Erratum : 1. Dans le tableau, modifier les titres des deux dernières colonnes.
Colonne 3 : sin $r\ x_i$. Colonne 4 : sin $i\ y_i$.

1. Le texte de la question 1 devient : « Reproduire et compléter le tableau en calculant les sinus x_i des angles de réfraction et les sinus y_i des angles d'incidence (compte tenu de la précision des mesures, on arrondira les résultats à 10^3). »

1.



2. Le nuage de points a une forme allongée. L'ajustement affine est justifié.

3. a. On obtient l'équation : $y = 0{,}771x + 58{,}172$.

b. Voir le graphique.

c. Pour l'année de rang 6, on peut estimer la population à : $0{,}771 \times 6 + 58{,}172 = 62{,}798$ milliers d'habitants, c'est-à-dire 62 798 habitants.

4. On obtient les taux annuels de croissance suivants :

C2 = =100*(B3-B2)/B2

	A	B	C
1	Rang	Population	Taux de croissance
2	0	58	1,79
3	1	59,04	1,42
4	2	59,88	1,12
5	3	60,55	0,91
6	4	61,1	

Je me teste

(Livre élève pages 17 et 18)

EXERCICE 1 Étude d'un échantillon

On dispose des données suivantes concernant un échantillon de 20 hommes : âges t_i en années, tailles x_i en mètres, poids y_i en kg (en physique, on parle de masses).

n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Âge : t_i	22	26	33	35	38	40	42	42	43	44	45	48	49	50	51	53	56	61	64	75
Taille : x_i	1,82	1,71	1,72	1,75	1,77	1,97	1,94	1,76	1,68	1,98	1,79	1,82	1,80	1,87	1,72	1,65	1,90	1,81	1,75	1,68
Poids : y_i	75	66	64,4	74,2	70,5	93,2	90,4	71,5	59,8	95,2	73,1	74,2	71	82,8	75,4	68,7	75,1	73	82,6	64

On peut trouver ces données sur le fichier « 01_lorentz.xls » ou « 01_lorentz.ods ».

On souhaite examiner de quelle manière le poids est lié à l'âge et à la taille.

1 Représenter avec un tableur les nuages des points $M_i(t_i\,;\,y_i)$ et $N_i(x_i\,;\,y_i)$.

2 D'après l'aspect de ces deux nuages, peut-on considérer que, sur cet échantillon :

a. le poids est lié à l'âge ?

Non. Le nuage des points M_i n'a pas une forme allongée.

b. le poids est lié à la taille ?

Oui. Le nuage des points N_i a une forme allongée.

A

Appelez le professeur pour présenter votre argumentation.

3 Effectuer un ajustement affine du nuage de points $N_i(x_i\,;\,y_i)$ à l'aide du tableur. Donner une équation de la droite obtenue.

$y = 85{,}708x - 78{,}797$.

4 Selon la tendance observée sur cet échantillon, estimer le poids d'un homme mesurant 1,85 m.

$85{,}708 \times 1{,}85 - 78{,}797 \approx 79{,}8$ kg.

VERS LE CCF

EXERCICE 2 Formule de Lorentz

La formule de Lorentz donne le poids moyen selon la taille :

$$\textbf{poids} = 100 \times \left(\textbf{taille} - 1 - \frac{\textbf{taille} - 1{,}5}{a}\right).$$

(taille en mètres ; poids en kg ; $a = 4$ pour un homme ; $a = 2{,}5$ pour une femme.)

1 Que fournit la formule :

a. pour un homme de 1,85 m ?

$100 \times \left(0{,}85 - \frac{0{,}35}{4}\right) =$

76,25 kg

b. pour une femme de 1,73 m ?

$100 \times \left(0{,}73 - \frac{0{,}23}{2{,}5}\right) =$

63,8 kg.

2 Cette formule a-t-elle un sens appliquée à un petit garçon de 80 cm ?

$100 \times \left(-0{,}2 - \frac{-0{,}7}{4}\right) = -2{,}5$

n'a pas de sens.

3 Montrer que, dans les cas des hommes, la formule de Lorentz peut s'écrire sous la forme :
$y = 75x - 62{,}5$ où x désigne la taille, en m, et y le poids, en kg.

$100 \times \left(x - 1 - \frac{x - 1{,}5}{4}\right) = 100 \times (x - 1 - 0{,}25x + 0{,}375)$

$= 100 \times (0{,}75x - 0{,}625) = 75x - 62{,}5.$

4 Calculer y pour $x = 1{,}85$ et comparer au résultat de la question 4 de l'exercice 1.

$75 \times 1{,}85 - 62{,}5 = 76{,}25.$

Ce résultat est inférieur à 79,8.

A

Appelez le professeur pour présenter vos calculs.

2. DÉRIVÉE ET SENS DE VARIATION D'UNE FONCTION

4 Fonction dérivée

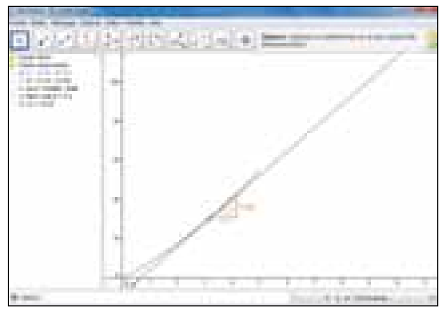
Capacité

• Utiliser les formules et les règles de dérivation pour déterminer la dérivée d'une fonction

(Livre élève pages 19 et 20)

1 Déterminer une fonction dérivée

La vitesse du surfeur



Un surfeur est resté 5 secondes dans un tube. Pour obtenir la fonction donnant la position du surfeur à chaque instant, on a considéré lors de l'étude du mouvement du surfeur par vidéo qu'il était en accélération constante de l'entrée à la sortie du tube.

Soient la fonction f définie sur [0 ; 5] par $f(x) = 0{,}8x^2 + 7x$ et C_f sa courbe représentative.

Ouvrir le fichier « **02_surfeur.ggb** ». En A est affiché le coefficient directeur de la tangente à la courbe en ce point.
Le point B a même abscisse que le point A et son ordonnée est égale à $f'(x_A)$.

1. a. Vérifier que la trace du point B est activée.

b. Déplacer le point A pour tout x de [0 ; 5].

2. a. Donner les nombres dérivés pour $x = 0$ et $x = 5$. $f'(0) =$ 7 .... et $f'(5) =$ 15 ....

b. Vérifier l'ordonnée de B pour ces abscisses. Elle a pour valeur le nombre dérivé. ....

3. Quelle conjecture peut-on faire sur l'allure de la courbe obtenue par la trace du point B ?

La courbe obtenue par la trace du point B est une droite. ....

L'équation de cette courbe est $y =$ 1,6x + 7 ....

4. Taper cette expression dans le champ de saisie pour vérifier la vraisemblance de la conjecture faite.

La fonction f' qui, à tout x de [0 ; 5], associe $f'(x) = 1{,}6x + 7$ est appelée fonction dérivée de la fonction f.

f' permet d'obtenir la vitesse du surfeur à chaque instant passé dans le tube.

2 Dériver quelques fonctions usuelles

1. Soient la fonction f définie pour tout x par $f(x) = x^2$ et C_f sa courbe représentative.

Ouvrir le fichier « **02_carre.ggb** ». En A est affiché le coefficient directeur de la tangente à la courbe en ce point.

a. Déplacer le point A pour obtenir différentes valeurs de x et compléter le tableau suivant :

x	– 2	– 1	0	1	2
$f'(x)$	– 4	– 2	0	2	4

b. Quelle conjecture peut-on faire sur l'allure de la courbe obtenue par la trace du point B ?

La courbe obtenue est une droite ; $y = 2x$. ....

c. Taper cette expression dans le champ de saisie pour vérifier la vraisemblance de la conjecture.

d. On en déduit que la fonction dérivée de la fonction carré est : $f'(x) = 2x$.

2. Soient la fonction g définie pour tout x par $g(x) = x^3$ et C_g sa courbe représentative.

Ouvrir le fichier « **02_cube.ggb** ».

a. Déplacer le point A pour obtenir différentes valeurs de x et compléter le tableau suivant :

x	-2	-1	0	1	2
$g'(x)$	12	3	0	3	12

b. Quelle conjecture peut-on faire sur l'allure de la courbe obtenue par la trace du point B ?

La courbe obtenue est une parabole : $y = 3x^2$.

c. Taper cette expression dans le champ de saisie pour vérifier la vraisemblance de la conjecture.

d. On en déduit que la fonction dérivée de la fonction cube est : $g'(x) = 3x^2$.

3. Soient la fonction h définie pour tout x par $h(x) = ax + b$ et C_h sa courbe représentative.

Ouvrir le fichier « **02_affine.ggb** ». Vérifier que le coefficient a vaut 1.

a. Déplacer le point A pour obtenir différentes valeurs de x et compléter le tableau suivant :

x	-2	-1	0	1	2
$h'(x)$	1	1	1	1	1

b. Quelle conjecture peut-on faire sur l'allure de la courbe obtenue par la trace du point B ?

C'est une droite d'équation $y = 1$ ou $y = a$.

c. Faire varier les coefficients a et b à l'aide des curseurs et vérifier la conjecture faite.

d. On en déduit que la fonction dérivée de la fonction affine h est : $h'(x) = a$.

Ces résultats se retrouvent dans le formulaire page 25.

Comment calculer la dérivée d'une fonction ?

a. Calculer la dérivée de la fonction f définie pour tout x par $f(x) = 3x - 4$.

- Identifier la forme de la fonction : $f(x)$ est de la forme $ax + b$ avec $a = 3$ et $b = -4$.
- Lire dans le tableau de la page 25 la fonction dérivée correspondante : $f'(x) = a$.
- Calculer la dérivée : $f'(x) = 3$.

b. Calculer la dérivée de la fonction g définie pour tout x positif par $g(x) = \sqrt{x} + 5x + 2$.

- Identifier la forme de la fonction : $g(x)$ est de la forme $u(x) + v(x)$ avec $u(x) = \sqrt{x}$ et $v(x) = 5x + 2$.
- Lire dans le tableau de la page 25 la fonction dérivée correspondante : $g'(x) = u'(x) + v'(x)$.
- Calculer la dérivée : on a donc, pour tout $x > 0$, $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 5$.

RÉPONSES

Exercices

1 **a.** $f'(x) = -8x$; **b.** $f(x) = -4x + 1{,}5$.

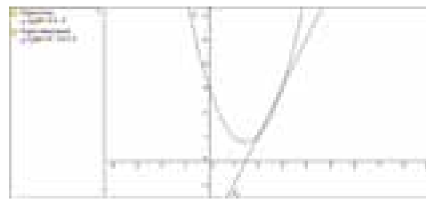
2 **a.** $f'(x) = 15x^2 - 4$; **b.** $f'(x) = -\frac{3}{x^2}$, avec $x \neq 0$.

3 **a.** $f'(x) = 4$; **b.** $f'(x) = 6x^2$.

5 Signe de la dérivée et sens de variation

(Livre élève pages 21 et 22)

Capacités
- Étudier, sur un intervalle donné, les variations d'une fonction à partir du calcul et de l'étude du signe de sa dérivée. Dresser son tableau de variation
- Déterminer un extremum d'une fonction sur un intervalle donné à partir de son sens de variation



1 Sommet d'une parabole

Soit la fonction f_1 définie sur $[-1\,;4]$ par $f_1(x) = x^2 - 3x + 3$.

1. Tracer, à l'aide de GeoGebra ou de la calculatrice, la représentation graphique de la fonction f_1.

2. Calculer l'abscisse x du sommet de cette parabole : $x = \dfrac{3}{2 \times 1}$ $x = 1{,}5$.

Le sommet de la parabole correspond-il à un maximum ou à un minimum de f_1 ? Au minimum.

3. Dresser le tableau de variation de f_1.

x	-1		$1{,}5$		4
$f_1(x)$	7	↘	0,75	↗	7

4. Tracer, dans le même repère que f_1, la fonction g_1 définie sur $[-1\,;4]$ par $g_1(x) = 2x - 3$.

5. Que représente la fonction g_1 pour la fonction f_1 ?

g_1 représente la fonction dérivée de f_1.

6. Dresser le tableau de signe de la fonction g_1.

x	-1		$1{,}5$		4
Signe de $g_1(x)$		$-$	0	$+$	

7. Conjecturer le lien qui existe entre le tableau de variation de la fonction f_1 et le tableau de signe de la fonction g_1. Lorsque le signe de g_1 est négatif, la fonction f_1 est décroissante et le contraire quand g_1 est positif.

2 Signe de la dérivée et sens de variation

1. Recommencer ce travail avec les fonctions $f_2(x) = -x^2 + x - 4$ et $g_2(x) = -2x + 1$ définies sur $[-2\,;3]$.

- L'abscisse x du sommet de cette parabole vaut $x = 0{,}5$, le sommet de la parabole correspond à un maximum de la fonction f_2.
- Tableau de variation de f_2

x	-2		$0{,}5$		3
$f_2(x)$	-10	↗	$-3{,}75$	↘	-10

- La fonction g_2 représente la fonction dérivée pour la fonction f_2.
- Tableau de signe de g_2

x	-2		$0{,}5$		3
Signe de $g_2(x)$		$+$	0	$-$	

2. Recommencer ce travail avec les fonctions $f_3(x) = 3x^2 + 5x - 2$ et $g_3(x) = 6x + 5$ définies sur $[-3 ; 1]$.

- L'abscisse x du sommet de cette parabole vaut $x = \frac{-5}{6}$ ……………, le sommet de la parabole correspond à un minimum ……………… de la fonction f_3.

  Tableau de variation de f_3

x	-3		$\frac{-5}{6}$		1
$f_3(x)$	10	↘	$4{,}25$	↗	6

- La fonction g_3 représente la fonction dérivée ………………………………… pour la fonction f_3.

  Tableau de signe de g_3

x	-3		$\frac{-5}{6}$		1
Signe de $g_3(x)$		$-$	0	$+$	

3. La conjecture faite à la question 1.7. est-elle vérifiée ? Oui pour g_2 et g_3 ………………………………….

Comment étudier le sens de variation d'une fonction ?

Étudier le sens de variation de la fonction f définie sur $[0{,}2 ; 5]$ par $f(x) = \dfrac{1}{x} + x$.

Pour cela, on montrera que la dérivée peut se mettre sous la forme $f'(x) = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x^2}$.

- Calculer la dérivée de f : $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2} + 1$ ………………
- Mettre l'écriture de $f'(x)$ sous la forme $f'(x) = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x^2}$.

  $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2} + 1 = \dfrac{-1}{x^2} + \dfrac{x^2}{x^2} = \dfrac{-1+x^2}{x^2}$ ………………………………

  $f'(x) = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x^2}$ ………………………………

On applique l'identité remarquable : $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

- Rechercher sur l'intervalle d'étude les valeurs pour lesquelles la dérivée s'annule. Pour -1 et 1 ……………………

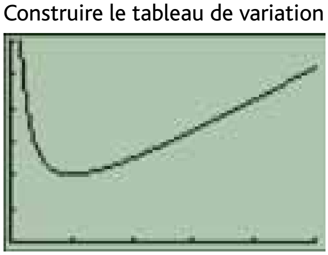
  Sur $[0{,}2 ; 5]$, $f'(x)$ s'annule pour l'abscisse 1 ………………………………….

- Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0{,}2 ; 5]$ et l'indiquer dans le tableau de variation.

  Du signe de $(x-1)$. $x - 1 > 0$ pour $x > 1$ et $x - 1 < 0$ pour $x < 1$.

- Construire le tableau de variation de la fonction f.

x	$0{,}2$		1		5
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$5{,}2$	↘	2	↗	$5{,}2$



Pensez à vérifier la cohérence entre le tableau de variation et la courbe.

Exercice

RÉPONSES

a. $f'(x) = 7$.

x	0		10
Signe de $f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-5	↗	65

b. $f'(x) = -4$.

x	-5		6
Signe de $f'(x)$		$-$	
$f(x)$	23	↘	-21

c. $f'(x) = 2x - 3$.

x	0		$1{,}5$		4
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	↘	$-0{,}25$	↗	6

d. $f'(x) = 6x^2 - 2$

x	-1		$-\sqrt{1/3}$		$\sqrt{1/3}$		3
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	$\approx 0{,}770$	↘	$-0{,}770$	↗	48

(Livre élève pages 23 et 24)

6 J'utilise une calculatrice

Rechercher un extremum

1. Rechercher un extremum

On a vu dans la fiche 5 que les sommets des paraboles correspondent aux points où la dérivée est nulle. On va vérifier dans cette partie, à l'aide de la dérivée, si pour d'autres fonctions le point où la dérivée s'annule correspond toujours à un minimum ou un maximum.

Soient les fonctions : f définie sur $[-2 ; 2]$ par $f(x) = x^3 - 3x$; g définie sur $[0{,}2 ; +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{x} - x$ et h définie sur $[-2 ; 2]$ par $h(x) = x^3$.

a. Calculer les dérivées des fonctions f, g et h sur leur intervalle de définition et étudier leur signe.

$f'(x) = 3x^2 - 3$; $\Delta = 36 > 0$; $x = -1$ et $x_2 = 1$ d'où $f'(x) < 0$ pour $x \in [-1 ; 1]$.

$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1$; $g'(x) > 0$ pour $x < 0{,}25$. $h'(x) = 3x^2$ toujours positive.

b. Dresser les tableaux de variation des fonctions f, g et h.

x	-2		-1		1		2
Signe de $f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	-2	↗	2	↘	-2	↗	2

x	$0{,}2$		$0{,}25$		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		+	0	−	
$g(x)$	$0{,}247$	↗	$0{,}25$	↘	

x	-2		0		2
Signe de $h'(x)$		+	0	+	
$h(x)$	-8	↗		↗	8

c. Tracer les courbes représentatives des fonctions f, g et h sur la calculatrice et vérifier les résultats précédents.

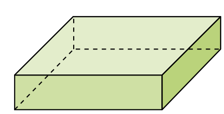
d. Grâce à l'observation des tableaux de variation, répondre au problème posé.

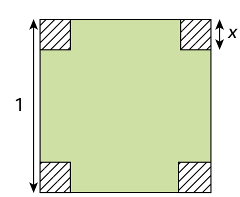
Non ce n'est pas toujours le cas. Pour contre exemple le tableau de variation de h.

> Ne pas confondre tableau de signes et tableau de variation.

2. Déterminer la valeur exacte d'un extremum

On désire construire une boîte sans couvercle de volume le plus grand possible. Pour cela, on dispose d'une plaque carrée de 1 mètre de côté. À chaque coin de la plaque, on enlève un carré de côté x (mètre), avec x compris entre 0 et 0,5.





a. Exprimer les dimensions de la boîte en fonction de x :

largeur : $1 - 2x$; longueur : $1 - 2x$; hauteur : x.

b. Vérifier que le volume de la boîte s'exprime en fonction de x par $V(x) = 4x^3 - 4x^2 + x$.

$(1 - 2x)(1 - 2x)x = (4x^2 - 4x + 1) \times x = 4x^3 - 4x^2 + x$

Soit la fonction f définie sur $[0 ; 0{,}5]$ par $f(x) = 4x^3 - 4x^2 + x$.

c. Tracer la courbe représentative de la fonction f sur la calculatrice.

> Réglez correctement la fenêtre de la calculatrice pour voir la courbe sur l'intervalle d'étude.

d. Déterminer graphiquement l'abscisse du maximum. $x = 0{,}17$

e. Étudier les variations de f.

$f'(x) = 12x^2 - 8x + 1$; $\Delta = 16 > 0$; $x_1 = 1/6$ et $x_2 = 0{,}5$;

x	0		$1/6$		$0{,}5$
$f'(x)$		+	0	−	0
$f(x)$		↗		↘	

f. La valeur exacte du maximum est $\frac{1}{6}$. Donc, le volume maximal de la boîte vaut $\frac{2}{27}\,m^3$.

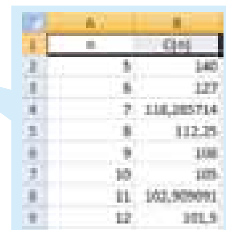
J'utilise un logiciel (tableur)

Déterminer un minimum

Coût unitaire de gestion

Le responsable d'un magasin analyse le coût unitaire (coût d'un seul objet) de gestion de son stock d'imprimantes multifonctions. Il estime que ce coût $C(n)$, en euros, est lié au nombre n de commandes reçues, où n est compris entre 5 et 30, par la relation : $C(n) = 2n + 40 + \dfrac{450}{n}$.

1. Calculs de coûts unitaires



	A	B
1	n	C(n)
2	5	140
3	6	127
4	7	118,285714
5	8	112,25
6	9	108
7	10	105
8	11	102,909091
9	12	101,5

a. ▪ Avec un tableur, réaliser la feuille de calcul dont voici un extrait.

▪ Faire varier n de 5 à 30 avec un pas de 1.

▪ Quelle formule faut-il entrer dans la cellule B2 ? =2*A2+40+450/A2

▪ Recopier cette formule vers le bas jusqu'à la valeur 30 de n.

b. ▪ En utilisant l'Assistant graphique, afficher la représentation graphique de $C(n)$. Choisir *Nuage de points reliés par une courbe lissée*.

▪ Régler sur l'axe des ordonnées le minimum à 90 et le maximum à 150.

c. Estimer graphiquement la valeur du minimum. Pour $n = 15$

d. Estimer graphiquement les valeurs de n pour lesquelles $C(n) \leq 110$. Pour $9 \leq n \leq 26$

2. Étude d'une fonction

Soit la fonction f définie sur $[5 ; 30]$ par $f(x) = 2x + 40 + \dfrac{450}{x}$.

a. Calculer $f'(x)$ où f' est la dérivée de la fonction f. $f'(x) = 2 - \dfrac{450}{x^2}$

b. On admet que $f'(x)$ peut s'écrire : $f'(x) = \dfrac{2x^2 - 450}{x^2}$.

Étudier le signe de $f'(x)$. Pour cela on est amené à résoudre l'équation $2x^2 - 450 = 0$.

$x^2 = 225$ d'où $x = -15$ ou $x = 15$ soit sur $[5 ; 30]$ pour $x = 15$.

c. Construire le tableau de variation de la fonction f.

x	5		15		30
Signe de $f'(x)$		–	0	+	
$f(x)$	140	↘	100	↗	115

d. En déduire la valeur du minimum. $f(15) = 100$

e. Résoudre l'inéquation $f(x) \leq 110$.

Pour cela, se ramener à une inéquation du second degré. On se ramène à $2x^2 - 70x + 450 \leq 0$.

$\Delta = 1\,300$; $x_1 = \dfrac{70 - \sqrt{1300}}{4}$ et $x_2 = \dfrac{70 + \sqrt{1300}}{4}$. Soit pour $x \leq x_1$ ou $x \geq x_2$.

3. Exploitation

En utilisant les résultats précédents, compléter les phrases suivantes :

a. Le nombre de commandes à réaliser afin d'obtenir un coût unitaire de gestion de stock minimal est 15 ; dans ce cas le montant de ce coût minimal vaut 100 .

b. Le nombre de commandes correspondant à un coût unitaire de gestion de stock inférieur ou égal à 110 € est compris entre 9 et 26 .

Exercices & Problèmes

Exercices p. 27 et 28

1. QCM

a. la fonction f est décroissante sur cet intervalle.

b. la fonction f est constante sur cet intervalle.

c. pour tout x de I, $f'(x) \leq 0$.

d. $f'(x) = -6x + 1$.

e. $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

2. Choix dans une liste

a. La fonction f est décroissante sur $[-1 ; 4]$ et la fonction f est croissante sur $[-9 ; -1]$.

b. La fonction f est décroissante sur $[-5 ; -2]$ et $[5 ; 9]$ et la fonction f est croissante sur $[-2 ; 5]$.

c. La fonction f est croissante sur $[0 ; 0,5]$ et la fonction f est décroissante sur $[0,5 ; 1]$.

3. Associer

$f(x) = 4x^2 + \dfrac{4}{x} + 5$

$f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}} \longrightarrow f(x) = 4\sqrt{x}$

$f'(x) = 4x + 2 \longrightarrow f(x) = 2x^2 + 2x - 5$

$f'(x) = 4x - \dfrac{4}{x^2} \longrightarrow f(x) = 2x^2 + \dfrac{4}{x} + 5$

$f'(x) = 4x^2 + 2x + 1 \longrightarrow f(x) = \dfrac{4}{3}x^3 + x^2 + x - 5$

$f(x) = 2\sqrt{x}$

4. QCM

x	-4		-1		2		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

b. Donc, f est décroissante sur $[-1 ; 2]$.

› Calculer une fonction dérivée

5. a. $f'(x) = \dfrac{4}{x^2}$, avec $x \neq 0$.

b. $f'(x) = -\dfrac{6}{x^2}$, avec $x \neq 0$.

6. a. $f'(x) = \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, pour $x > 0$.

b. $f'(x) = \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, pour $x > 0$.

7. a. $f'(x) = 3x^2 + 2$.

b. $f'(x) = 15x^2 - 4x$.

8. a. $f'(x) = -4x$.

b. $f'(x) = 3x^2 - 7$.

9. a. $f'(x) = 6x - \dfrac{2}{x^2}$, avec $x \neq 0$.

b. $f'(x) = 15x^2 + \dfrac{4}{x^2}$, avec $x \neq 0$.

10. a. $f'(x) = 42x + 1$.

b. $f'(x) = 6x - 6$.

11. a. $f'(x) = 9x^2 + 8x$.

b. $f'(x) = -\dfrac{3}{x^2}$, avec $x \neq 0$.

12. a. $f'(x) = 7$, $f'(1) = 7$.

b. $f'(x) = 8x + 3$, $f'(3) = 27$.

c. $f'(x) = -3x^2 + 14x$, $f'(1) = 11$.

13. a. $f'(x) = -6x - 10$, $f'(0) = -10$.

b. $f'(x) = 14x - \dfrac{2}{x^2}$ avec $x \neq 0$, $f'(2) = 27,5$.

14. a. $f'(x) = x + 4$.

b. $f'(2) = 6$.

c. $y = 6x - 5$.

› Déterminer le sens de variation d'une fonction à partir de sa fonction dérivée

15. a. $f'(x) = 4x$.

x	-3		0		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$2x^2 - 1$	17	↘	-1	↗	17

b. $f'(x) = \dfrac{4}{x^2} + 2$.

x	-5		-1
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-9,8$	↗	2

16. a. $f'(x) = 3x^2 - 6x$.

x	-1		0		2		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-4	↗	0	↘	-4	↗	0

b. $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$.

x	-3		-2		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	12	↗	23	↘	-4	↗	7

17. a. $f'(x) = -10x$.

x	-1		0		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$-5x^2 + 2$	-3	↗	2	↘	-3

b. $f'(x) = 9x^2 + 4x - 12$.

x	-3		$\approx -1{,}40$		$\approx 0{,}96$		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-24	↗	$\approx 15{,}49$	↘	$\approx -4{,}02$	↗	11

› Rechercher l'extremum d'une fonction sur un intervalle donné

18. $f'(x) = 8x - 2$. Le minimum de f sur $[-1\,;1]$ est pour $x = \frac{1}{4}$. Il est égal à $\frac{3}{4}$.

19. $f'(x) = -54x^2 + 9$. Le maximum de f sur $[0\,;2]$ est pour $x = \frac{1}{\sqrt{6}}$. Il est égal à $f(\frac{1}{\sqrt{6}}) \approx 1{,}837$.

20. $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$. Le maximum de f sur $[-2\,;0]$ est pour $x = -1$. Il est égal à 6.

21. $f'(x) = 1{,}5x^2 - 2$. Le minimum de f sur $[-1\,;4]$ est pour $x = \sqrt{\frac{4}{3}}$. Il est égal à $f(\sqrt{\frac{4}{3}}) \approx -4{,}732$.

Problèmes p. 29 et 30

› Problème 1

Le caddy moyen

1. a. $C_A(n) = 100 \times n$.

2. a.

x	0	30	50	90	150	200	300	400	410
$f(x)$	4 800	3 000	2 200	1 560	3 000	6 400	19 200	40 000	42 520

c. $f'(x) = 0{,}8x - 72$.

d. $f'(x) = 0$ pour $x = 90$.

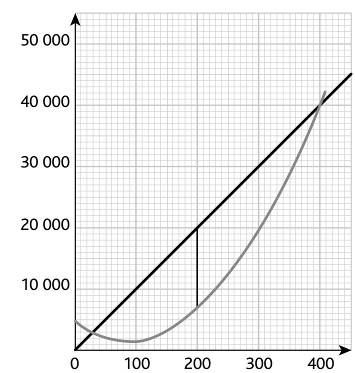
e.

x	0		90		410
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	4 800	↘	1 560	↗	42 520

3. a. Les charges sont minimales pour 90 clients.

b. Il s'agit de la différence des extrémités du segment verticale. 20 000 – 6 500 = 13 500.
Soit, avec la précision du graphique, les 13 600 € de bénéfice.

Graphique pour les questions : 1.b., 2.b., 2.f. et 3.b.



› Problème 2

Bénéfice maximal

B est une fonction du second degré qui présente un maximum lorsque sa dérivée s'annule.
$B'(q) = -2q + 90$ et s'annule pour $q = 45$.
Il doit fabriquer 45 boîtes de jeu. $B(45) = 1\,764$.
Dans ce cas, le bénéfice est de 1 764 €.

› Problème 3

Bénéfice maximal

a. La recette obtenue est $R(q) = 38q$.
Le bénéfice est obtenue par $R(q) - C(q)$.
$B(q) = -0{,}02q^3 + 2{,}1q^2 - 36q - 80$.
$B'(q) = -0{,}06q^2 + 4{,}2q - 36$.
B' s'annule pour $q = 10$ et $q = 60$.
D'où le tableau de variation :
Pour que le bénéfice soit maximal, l'entreprise doit fabriquer 60 lots.

q	0		10		60	
Signe de $B'(q)$		–	0	+	0	–
$B(q)$	– 80	↘	– 250	↗	1 000	↘

b. Dans ce cas, le bénéfice est de 1 000 €.

› Problème 4
Gestion de stocks

1. a. $f'(x) = 150 - \dfrac{540\,000}{x^2}$.

b. Il s'agit de la valeur qui annule la dérivée lorsque $x > 0$.

$f'(x) = 0$ lorsque $150 - \dfrac{540\,000}{x^2} = 0$.

Soit $150x^2 - 540\,000 = 0$.
C'est-à-dire, pour $x > 0$, lorsque $x = \sqrt{3\,600} = 60$.

c. $f(60) = 18\,000$. Le coût de gestion minimal vaut 18 000 €.

2. a. $f'(x) = 97{,}2 - \dfrac{6{,}75 \times 10^8}{x^2}$.

On obtient $f'(x) = 0$ lorsque $97{,}2x^2 - 6{,}75 \times 10^8 = 0$.
C'est-à-dire, pour $x > 0$, lorsque $x \approx 2\,635$.
$f(2\,635) = 762\,289$. Le coût de gestion minimal vaut 762 289 €.

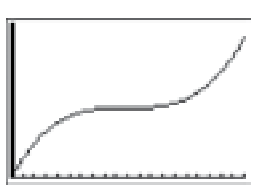
b. $f'(x) = 0{,}35 - \dfrac{3{,}0875 \times 10^8}{x^2}$.

On obtient $f'(x) = 0$ lorsque $0{,}35x^2 - 3{,}0875 \times 10^8 = 0$.
C'est-à-dire, pour $x > 0$, lorsque $x \approx 29\,701$.
$f(29\,701) = 22\,191$. Le coût de gestion minimal vaut 22 191 €.

› Problème 5
Coût moyen et bénéfice

1. a. $C'(x) = 1{,}5x^2 - 30x + 150$.
$\Delta = 0$, $C'(x) = 0$ pour $x = 10$. $C'(x) \geq 0$ pour x appartenant à $[0\,;20]$.
Donc C est croissante sur $[0\,;20]$.

b.



2. a. $C_M(x) = 0{,}5x^2 - 15x + 150$.

b. C_M est une fonction du second degré qui présente un minimum lorsque sa dérivée s'annule.
$C_M'(x) = x - 15$ et s'annule pour $x = 15$.

c. Le coût moyen minimal est obtenu pour $x = 15$.
$C_M(15) = 37{,}5$.
Le coût moyen minimal vaut 37,5 milliers d'euros.

3. a. $B(x) = -0{,}5x^3 + 15x^2 - 108x$.
$B'(x) = -1{,}5x^2 + 30x - 108$.
B' s'annule pour $x = 4{,}7$ et $x = 15{,}3$.
D'où le tableau de variation :

x	0		≈ 4,7		≈ 15,3		20
Signe de $B'(x)$		–	0	+	0	–	
$B(x)$	– 108	↘	– 228	↗	68	↘	– 160

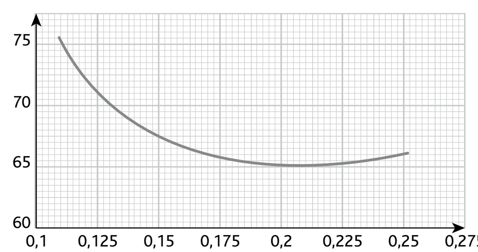
Pour que le bénéfice soit maximal, l'entreprise doit fabriquer 15,3 tonnes.

b. Non, le coût moyen est minimisé pour une production de 15 tonnes.

› Problème 6
Recherche du prix minimal

1. $p(0{,}1) = 75{,}5$; $p(0{,}18) = 65{,}23$; $p(0{,}2) = 65$; $p(0{,}22) = 65{,}19$; $p(0{,}25) = 66{,}05$.

2.



3. Graphiquement, $p(h)$ a pour valeur minimale 65.

4. a. $p'(h) = 105 - \dfrac{4{,}2}{h^2}$.

b. $p'(h) = 0$ pour $h = \sqrt{\dfrac{4{,}2}{105}} = 0{,}2$.

h	0,1		0,2		0,25
Signe de $p'(x)$		–	0	+	
$p(x)$	77,5	↘	65	↗	66,05

5. a. L'épaisseur économique est 0,2 m.

b. Le prix minimal vaut 65 €.

› Problème 7
Recette marginale et coût marginal

1. $C_m(x) = \dfrac{1}{10}x^2 - 30x + 2\,500.$

2.a. $R(x) = x \times p(x) = -\dfrac{45}{8}x^2 + 2\,750x.$

b. $R_m(x) = -\,11{,}25x + 2\,750.$

c. $R_m(x) = C_m(x)$
lorsque $-\,11{,}25x + 2\,750 = \dfrac{1}{10}x^2 - 30x + 2\,500.$
Cela revient à résoudre l'équation
$0{,}1x^2 - 18{,}75x - 250 = 0.$
Soit pour $x = -\,12{,}5$ ou $x = 200.$
Comme $x > 0$, alors $R_m(x) = C_m(x)$ pour $x = 200.$

3. a. On obtient bien $B(x)$ en calculant :
$B(x) = R(x) - C(x).$

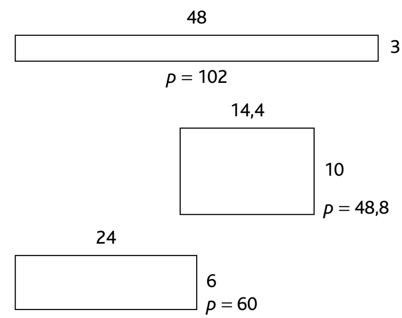
b. $B'(x) = -\,0{,}1x^2 + 18{,}75x + 250.$

c. Le bénéfice est maximal lorsque $B'(x) = 0.$
Ce qui revient à résoudre la même équation qu'en 2.c. pour $R_m(x) = C_m(x).$
Donc, on a bien le bénéfice maximal lorsque la recette marginale est égale au coût marginal.

d. $B(200) = 158\,333{,}33$. Dans ce cas le bénéfice maximal vaut 158 333,33 €.

› Problème 8
La clôture la plus courte

1. a. et **b.**



c. Le rectangle de plus petit périmètre semble être le carré de côté 12.

2. a. On a $s = L \times l$ d'où $L = \dfrac{s}{l}.$

Donc, $p = 2l + 2L = 2l + \dfrac{2s}{l}.$

b. Il s'agit de la valeur qui annule la dérivée :
$p'(x) = 2 - \dfrac{2s}{x^2}.$
$p'(x) = 0$ lorsque $2x^2 - 2s = 0$. C'est-à-dire, pour $x > 0$, lorsque $x = \sqrt{s}$.

c. Lorsque $x = \sqrt{s}$, le rectangle est un carré. Ce qui confirme la conjecture de 1.c.

Je me teste

(Livre élève pages 31 et 32)

EXERCICE 1 Coût total de stockage

Une entreprise de transport assure, pour le compte d'un client, la gestion des stocks dans le cadre d'une prestation de transport élargie.

Le coût de possession du stock est donné par la relation : $p(n) = \frac{25}{16}$ où n est le nombre de commandes passées dans l'année. Le coût de passation est de 32 € par commande.

1 Détermination du coût total de stockage

Compléter le tableau suivant.

La dernière colonne correspond au cas général où la valeur de n n'est pas donnée.

Nombre de commandes dans l'année	2	10	n
Coût de possession (en €)	400	80	$\frac{800}{n}$
Coût de passation pour l'année (en €)	64	320	$32.n$
Coût total de stockage (en €)	464	400	$\frac{800}{n} + 32n$

2 Étude du coût total de stockage

On considère la fonction f définie sur [2 ; 10] par $f(x) = \frac{25}{16} + 32x$.

a. Calculer la dérivée f' de la fonction f.

$f'(x) = -\frac{800}{x^2} + 32$

b. Dresser le tableau de variation de f sur [0 ; 8].

$f'(x) \geq 0$ pour $-\frac{800}{x^2} + 32 \geq 0$; $\frac{-800 + 32x^2}{x^2} \geq 0$

Soit $32x^2 \geq 800$; $x^2 \geq 25$

Soit $x \leq -5$ ou $x \geq 5$

x	2		5		10
Signe de $f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	464	↘	320	↗	400

Appelez le professeur pour présenter vos résultats.

c. Tracer sur la calculatrice la courbe représentative de la fonction f pour x variant de 2 à 10.

d. Déduire de l'étude précédente le nombre de commandes que l'entreprise doit passer dans l'année afin d'obtenir un coût total de stockage minimum. 5 commandes

Donner le montant de ce coût minimum. 320 €

e. Déterminer graphiquement les différents nombres de commandes à passer dans l'année pour lesquels le coût total de stockage est inférieur à 360 €. Graphiquement on trouve entre 3,02 et 8,2 soit entre 4 et 8 commandes.

VERS LE CCF

EXERCICE 2 Coût d'approvisionnement

L'entreprise Transfrance fabrique des transformateurs spécifiques pour la marine et l'aviation. Elle doit constituer un stock de pièces pour garantir la continuité de sa production.

Elle a établi que le coût d'approvisionnement de n pièces dépend :

– du coût de livraison C_L, en euros, calculé à l'aide de la relation $C_L = \dfrac{1\,470\,000}{n}$;

– du coût de manutention C_M, en euros, calculé à l'aide de la relation $C_M = 3{,}5n$.

L'entreprise veut déterminer le nombre de pièces à commander afin de minimiser son coût d'approvisionnement.

a. Déterminer, en fonction de n, l'expression du cout d'approvisionnement C.

$C(n) = C_L + Cn$ $C(n) = \dfrac{1\,470\,000}{11} + 3{,}5n$

b. Calculer, en euros, le coût d'approvisionnement pour une commande de 300 pièces.

$C(300) = \dfrac{1\,470\,000}{300} + 3{,}5 \times 300 = 5\,950$ €

c. Étudier, sur l'intervalle [50 ; 1 000], les variations de C.

$C'(n) = -\dfrac{1\,470\,000}{n^2} + 3{,}5$

$C'(n) > 0$ pour $-\dfrac{1\,470\,000}{n^2} + 3{,}5 \geq 0$

Soit $3{,}5\,n^2 \geq 1\,470\,000$

$n^2 \geq 420\,000$

$C'(n) \geq 0$ pour $n \geq 100\sqrt{42}$

ou $n \leq -100\sqrt{42}$

x	50		$100\sqrt{42}$		1 000
$f'(x)$		–	0	+	
$f(x)$	29 575	↘		↗	4 970

d. Tracer la représentation graphique de C.
Support au choix : calculatrice, GeoGebra.

Appelez le professeur pour présenter votre démarche.

e. Déterminer de manière exacte le nombre de pièces à commander pour obtenir un coût d'approvisionnement minimum. Puis, en donner une valeur arrondie à l'unité.

D'après l'étude faite en c. et par lecture du tableau de variation on trouve $n = 100\sqrt{42}$

Soit $n \approx 648$.

Il faut commander 648 pièces pour un coût minimum.

f. En déduire le coût minimal d'approvisionnement.

$C(648) = \dfrac{1\,470\,000}{648} + 3{,}5 \times 648 = 4\,536{,}52$. Soit 4 536,52 €.

7 Suites arithmétiques

Capacité

- Appliquer les formules donnant le terme de rang n en fonction du premier terme et de la raison de la suite

(Livre élève pages 33 et 34)

1 Découvrir une nouvelle formule

Fidélité récompensée ?

Malika est cliente chez un opérateur téléphonique. Elle a reçu 50 points de fidélité en cadeau de bienvenue, puis chaque mois, avec son abonnement, elle gagne le même nombre de points supplémentaires. Voici le récapitulatif des points de fidélité obtenus les six premiers mois de son abonnement.

Mois	1er mois	2e mois	3e mois	4e mois	5e mois	6e mois
Nombre total de points fidélité acquis	80	110	140	170	200	230

1. Combien de points supplémentaires Malika gagne-t-elle chaque mois ?

Malika gagne chaque mois 30 points supplémentaires.

2. On désigne par u_n le nombre total de points acquis après n mois. Le premier terme de la suite est $u_0 = 50$.
La suite numérique (u_n) est une suite arithmétique. Quelle est sa raison r ?

La raison de la suite (u_n) est $r = 30$.

3. Compléter les pointillés :

$u_0 = 50$
$u_1 = 80$ ($+r$)
$u_2 = 110$ ($+2r$)
$u_3 = 140$ ($+3r$)
$u_4 = 170$ ($+4r$)
$u_5 = 200$ ($+5r$)
$u_6 = 230$ ($+6r$)
⋮
u_n ($+nr$)

$u_1 = u_0 + r$
$u_2 = u_0 + 2r$
$u_3 = u_0 + 3r$
$u_4 = u_0 + 4r$
$u_5 = u_0 + 5r$
$u_6 = u_0 + 6r$
⋮
$\boxed{u_n = u_0 + nr}$

Le premier terme peut être u_0 ou u_1.

4. Utiliser la formule établie à la question précédente pour calculer le nombre de points que Malika pourra acquérir si son abonnement dure 24 mois (soit u_{24}).

$u_{24} = 50 + 24 \times 30 = 770$ soit 770 points.

5. Ce nombre de points sera-t-il suffisant pour que Malika reçoive gratuitement le téléphone portable offert pour 1 000 points de fidélité ?

Les 770 points ne suffisent pas pour obtenir ce portable.

6. Si son abonnement lui rapportait 40 points de fidélité par mois, au bout de combien de mois pourrait-elle recevoir ce téléphone ?

On considère que la suite (u_n) a pour raison $r = 40$. En calculant, on trouve $u_{23} = 970$, $u_{24} = 1\,010$, il faut donc 24 mois.

Pour une suite arithmétique, la formule donnant le terme de rang n, en fonction du premier terme u_0 et de la raison r est : $u_n = u_0 + nr$.

2 Appliquer des formules

Avec l'achat d'un logiciel, un commercial propose un contrat d'assistance de deux ans comprenant une installation à domicile et un conseiller joignable par téléphone pour 20 € le premier mois, puis le deuxième mois 0,60 € de moins par rapport au mois précédent, et ainsi de suite. On note u_n la mensualité au n-ième mois pour ce contrat.

1. Déterminer u_1, u_2 et u_3.

$u_1 = 20$; $u_2 = 20 - 0{,}60 = 19{,}4$.

$u_3 = 19{,}4 - 0{,}60 = 18{,}8$.

2. Donner la raison de la suite (u_n).

(u_n) est une suite arithmétique de raison $r = -0{,}60$ car $u_2 - u_1 = 19{,}4 - 20 = -0{,}60$.

$u_2 - u_1 = 19{,}4 - 20 = -0{,}60$.

3. Parmi les trois propositions suivantes, entourer celle donnant l'expression de u_n en fonction de n.

$u_n = u_1 + (n-1)r$ $\qquad u_n = u_1 + nr$ $\qquad u_n = u_1 + (n+1)r$

4. Utiliser la formule choisie pour déterminer le montant de la dernière mensualité, soit u_{24}.

$u_{24} = 20 + (24 - 1) \times (-0{,}60) = 6{,}2$.

Le montant de la dernière mensualité est 6,20 €.

5. Combien coûte au total ce contrat d'assistance ? On pourra utiliser la formule donnant la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique : $S_n = \dfrac{n(u_1 + u_n)}{2}$.

$S_{24} = \dfrac{24(u_1 + u_{24})}{2} = \dfrac{24(20 + 6{,}2)}{2} = 314{,}4$.

Ce contrat d'assistance coûte au total 314,40 €.

Comment appliquer, pour une suite arithmétique, les formules donnant u_n en fonction du premier terme et de la raison de la suite ?

Une suite arithmétique (u_n) a pour premier terme $u_0 = 2$ et pour raison $-0{,}1$. Calculer u_{100}.

- Identifier les éléments connus : u_0 et la raison r.
- Identifier l'élément inconnu : u_{100}
- Choisir la formule qui convient : ☒ $u_n = u_0 + nr$ ☐ $u_n = u_1 + (n-1)r$
- Remplacer dans la formule choisie les éléments connus par leur valeur, puis calculer l'élément inconnu.

$u_{100} = u_0 + 100 \times r$ soit $u_{100} = 2 + 100 \times (-0{,}1)$

donc $u_{100} = -8$.

RÉPONSES

Exercices

1 On choisit la formule $u_n = u_0 + nr$ soit $u_{12} = 2{,}1 + 12 \times (-3{,}2)$ donc $u_{12} = -36{,}3$.

2 On choisit la formule $v_n = v_1 + (n-1)r$ soit $v_{20} = -150 + (20-1) \times 2{,}6$ donc $v_{20} = -100{,}6$.

8 Suites géométriques

Capacités
- Reconnaître une suite arithmétique ou géométrique
- Appliquer les formules donnant le terme de rang *n* en fonction du premier terme et de la raison de la suite

(Livre élève pages 35 et 36)

1 Utiliser une nouvelle formule pour les suites géométriques

À quand la fête ?

Quatre anciens élèves d'un lycée professionnel veulent retrouver leurs camarades et décident de créer une association d'anciens élèves. Pour cela, ils partent du principe suivant : « Tous les ans, chaque adhérent doit recruter un ancien élève. » Ainsi, chaque année le nombre d'adhérents doublera.

1. Si les adhérents suivent ce principe, déterminer le nombre d'adhérents la deuxième et troisième année.

Le nombre d'adhérents doublant chaque année par rapport à la précédente, il y aura 8 adhérents la deuxième année et 16 adhérents la troisième.

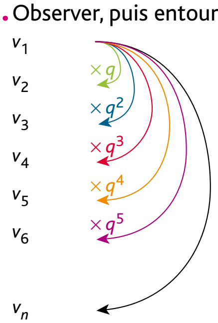
On définit la suite (v_n) dont le premier terme v_1 est 4 et v_n le nombre d'adhérents la n-ième année.

2. La suite (v_n) est géométrique. Donner la raison q et les valeurs de v_2 et v_3.

La raison de la suite est $q = 2$ puisque l'on double le nombre d'adhérents.

$v_2 = 8$ et $v_3 = 16$.

3. Observer, puis entourer l'expression de v_n qui semble correcte.



$v_n = v_1 \times q^{n-1}$

$v_n = v_1 \times q^n$

$v_n = v_1 \times q^{n+1}$

L'exposant dépendra du premier terme u_0 ou u_1 et du rang considéré.

4. L'association projette d'organiser un gala lorsque le seuil de 200 adhérents sera atteint. Pourra-t-elle organiser ce gala la sixième année ? Vérifier la réponse en calculant v_6 à l'aide de la formule choisie précédemment.

Il y aura 32 adhérents la quatrième année, 64 la cinquième et 128 la sixième année. L'association ne pourra pas organiser le gala la sixième année.

Vérification : $v_6 = 4 \times 2^5 = 128$.

Pour une suite géométrique, la formule donnant le terme de rang n, en fonction du premier terme u_1 et de la raison q est : $u_n = u_1 \times q^{n-1}$.

2 Résoudre un problème concret en utilisant les suites numériques

Le recyclage des bouteilles en plastique permet d'obtenir de nouvelles fibres en polyester pour fabriquer des vêtements en fibre polaire. Pour confectionner une veste polaire, il faut 27 bouteilles en plastique. En janvier 2011, une entreprise fabrique 4 000 vestes polaires. Pendant l'année 2011, elle souhaite augmenter la production, chaque mois, de 5 % par rapport au mois précédent.
On appelle u_1 la production du mois de janvier.

1. Calculer u_2, la production du 2^e mois et u_3 la production du 3^e mois.

$4\,000 \times \frac{5}{100} = 200$ donc $u_2 = 4\,000 + 200 = 4\,200$.

$4\,200 \times \frac{5}{100} = 210$ donc $u_3 = 4\,200 + 210 = 4\,410$.

2. Montrer que les termes u_1, u_2 et u_3 sont les trois premiers termes d'une suite géométrique (u_n) dont on précisera la raison.

$\frac{u_2}{u_1} = \frac{4\,200}{4\,000} = 1{,}05$; $\frac{u_3}{u_2} = \frac{4\,410}{4\,200} = 1{,}05$.

u_1, u_2 et u_3 sont les trois premiers termes d'une suite géométrique de raison 1,05.

3. À l'aide des fonctionnalités d'un tableur, recopier et compléter la feuille de calculs ci-contre.

Mois	n	u_n
janvier	1	4 000
février	2	4 200
mars	3	4 410
avril	4	4 630,5
mai	5	4 862,025
juin	6	5105,126
juillet	7	5360,383
août	8	5628,402
septembre	9	5909,822
octobre	10	6205,313
novembre	11	6515,579
décembre	12	6841,357

4. Calculer la production totale de vestes polaires sur l'année 2011. En déduire le nombre de bouteilles recyclées nécessaires pour leur fabrication.

En ajoutant $u_1 + u_2 + \ldots + u_{12}$ on trouve un total de 63 669 vestes polaires.

1 719 063 bouteilles seront nécessaires.

5. Le terme général de la suite (u_n) est $u_n = 4\,000 \times 1{,}05^{n-1}$, calculer la production le 36^e mois. L'objectif de production de 22 000 vestes polaires par mois, en moins de 3 ans, est-il atteint ?

$u_{36} = 4\,000 \times 1{,}05^{35} \approx 22\,064{,}06$

L'objectif de 22 000 vestes en moins de 3 ans sera donc atteint.

Comment utiliser, pour une suite géométrique, les formules donnant u_n en fonction du premier terme et de la raison de la suite ?

Une suite géométrique (u_n) a pour premier terme $u_0 = -20\,000$ et pour raison 0,6. Calculer u_{20}.

- Identifier les éléments connus. u_0 et la raison q.
- Identifier l'élément inconnu. u_{20}
- Choisir la formule qui convient : ☒ $u_n = u_0 \times q^n$ ☐ $u_n = u_1 \times q^{n-1}$
- Remplacer dans la formule choisie les éléments connus par leur valeur, puis calculer l'élément inconnu.

$u_{20} = u_0 \times q^{20} = -20\,000 \times 0{,}6^{20}$

$u_{20} \approx -0{,}731$.

RÉPONSES
Exercices

1 On choisit la formule $u_n = u_0 \times q^n$ soit $u_{13} = -12 \times 2^{13}$ donc $u_{13} = -98\,304$.
2 On choisit la formule $v_n = v_1 \times q^{n-1}$ soit $v_8 = 3\,100 \times 0{,}25^7$ donc $v_8 \approx 0{,}1892$.

(Livre élève pages 37 et 38)

9 J'utilise un logiciel (tableur)

Comparer des formules

Distinguer intérêt simple et intérêt composé

Amina n'a pas saisi la différence entre les intérêts simples et les intérêts composés. Pour mieux comprendre, elle décide d'utiliser un tableur. Elle dispose des informations suivantes :

> Si un capital C est placé à x % par an à **intérêt simple**, cela signifie que chaque année, l'intérêt reçu est le même.
> Si un capital C' est placé à y % par an à **intérêt composé**, cela signifie que les intérêts d'une année s'ajoutent au capital et que l'année suivante, ils rapportent eux aussi des intérêts.

Amina hésite entre deux placements :

- **placement 1** : capital de 4 500 € placé à 4,6 % par an à intérêt simple ;
- **placement 2** : capital de 4 500 € placé à 4 % par an à intérêt composé.

On note C_n le capital disponible ou « valeur acquise » au bout de n années avec le placement 1. Chaque année, l'intérêt est de 207 € car $4\,500 \times 4{,}6 \div 100 = 207$.

$C_n = C_{n-1} + 207$ et $C_0 = 4\,500$.

On note C'_n le capital disponible au bout de n années avec le placement 2.

$C'_n = C'_{n-1} \times 1{,}04$ et $C'_0 = 4\,500$.

1. Exemple de feuille de calculs pouvant être obtenue.

	A	B	C	D	E
1		Placement 1		Placement 2	
2	rang n	C_n calculé mois après mois	C_n calculé directement	C_n' calculé mois après mois	C_n' calculé directement
3	0	4500	4500	4500,00	4500,00
4	1	4707	4707	4680,00	4680,00
5	2	4914	4914	4867,20	4867,20
6	3	5121	5121	5061,89	5061,89
7	4	5328	5328	5264,36	5264,36
8	5	5535	5535	5474,94	5474,94
9	6	5742	5742	5693,94	5693,94
10	7	5949	5949	5921,69	5921,69
11	8	6156	6156	6158,56	6158,56
12	9	6363	6363	6404,90	6404,90
13	10	6570	6570	6661,10	6661,10
14	11	6777	6777	6927,54	6927,54
15	12	6984	6984	7204,64	7204,64
16	13	7191	7191	7492,83	7492,83
17	14	7398	7398	7792,54	7792,54
18	15	7605	7605	8104,25	8104,25
19	16	7812	7812	8428,42	8428,42
20	17	8019	8019	8765,55	8765,55
21	18	8226	8226	9116,17	9116,17
22	19	8433	8433	9480,82	9480,82
23	20	8640	8640	9860,05	9860,05

Pour compléter la colonne E, l'élève doit écrire dans la cellule E3, la formule =**$D$3*1,04^A3** dans laquelle le capital de la cellule D3 est pris comme référence absolue.

2. En B4, entrer la formule =B3+207 et recopier vers le bas la formule jusqu'en B23. Puis, en D4, entrer la formule =D3*1,04 et recopier vers le bas la formule jusqu'en D23.

3. Parmi les formules suivantes, sélectionner celle qui permet par recopie de calculer C_n en fonction de n. L'écrire dans la cellule C3.

=B3+A3*207 =$B$3+A3*207 =B3+$A$3*207

Quel est le rôle du symbole $ dans cette formule ?

Ce symbole permet de fixer la référence de la cellule B3.

Recopier la formule jusqu'en C23 puis comparer les colonnes B et C.

Les colonnes B et C affichent les mêmes nombres, les deux modes de calcul sont équivalents.

4. Entrer en E3 une formule, calculant C'_n directement en fonction de n, que l'on puisse recopier jusqu'en E23. Comparer les résultats des colonnes D et E.

A

Présentez au professeur votre feuille de calculs et justifiez oralement la formule de calcul direct de la cellule E3.

5. Quel est le placement qui permet d'avoir la plus grande valeur acquise au bout de cinq ans ? de dix ans ? de vingt ans ?

La proposition 1 est la plus rentable au bout de 5 ans ensuite, c'est la proposition 2.

J'utilise un logiciel (tableur)

Choisir le bon crédit

Coût total d'un crédit

Vous devez emprunter 2 500 € pour un achat. Le vendeur vous propose de choisir entre deux formules de crédit sur 12 mois.

Proposition 1 : la première mensualité est de 400 €, et chaque mois les mensualités suivantes diminuent de 30 € par rapport au mois précédent.

Proposition 2 : la première mensualité est de 400 € et chaque mois, les mensualités suivantes diminuent de 10 % par rapport au mois précédent.

	A	B	C
1		Proposition 1	Proposition 2
2	1ère mensualité	400	400
3	2ème mensualité		
4	3ème mensualité		
5	4ème mensualité		
6	5ème mensualité		
7	6ème mensualité		
8	7ème mensualité		
9	8ème mensualité		
10	9ème mensualité		
11	10ème mensualité		
12	11ème mensualité		
13	12ème mensualité		
14	TOTAL		

1. Générer les suites

- Ouvrir un logiciel tableur et recopier le tableau ci-contre.
- Quelle formule, à écrire dans la cellule B3 permettra, par recopie, d'obtenir les mensualités de la proposition 1 ?

  =B2-30

- Quelle formule, à écrire dans la cellule C3 permettra, par recopie, d'obtenir les mensualités de la proposition 2 ?

  =C2*0,9

- Écrire ces deux formules dans les cellules B3 et C3 et recopier pour obtenir toutes les mensualités.
- La suite de nombres formée par les mensualités de la proposition 1 est-elle arithmétique ou géométrique ? Même question pour la proposition 2.

  Pour la proposition 1, les mensualités forment une suite arithmétique de raison – 30.

  Pour la proposition 2, les mensualités forment une suite géométrique de raison 0,9.

2. Comparer l'évolution des mensualités

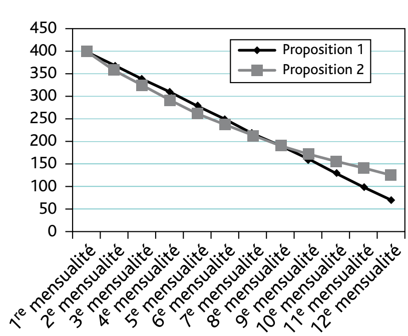
- Faire une phrase pour comparer l'évolution des mensualités des deux propositions.

  Dans les deux cas, le montant des mensualités diminue, les deux suites de nombres sont décroissantes.

  Les premiers mois, la proposition 2 diminue plus vite que la 1, ensuite c'est l'inverse.

- Utiliser les fonctionnalités du tableur pour proposer une représentation graphique qui permette d'illustrer et de comparer l'évolution des mensualités.

	Proposition 1	Proposition 2
1ère mensualité	400	400,00
2ème mensualité	370	360,00
3ème mensualité	340	324,00
4ème mensualité	310	291,60
5ème mensualité	280	262,44
6ème mensualité	250	236,20
7ème mensualité	220	212,58
8ème mensualité	190	191,32
9ème mensualité	160	172,19
10ème mensualité	130	154,97
11ème mensualité	100	139,47
12ème mensualité	70	125,52
TOTAL	2820	2870,28



3. Comparer le coût total du crédit

- Pour obtenir le montant total des 12 mensualités avec chaque proposition, utiliser la fonction « somme » du tableur.
- Comparer le coût total des deux propositions. Laquelle avez-vous intérêt à choisir ?

En faisant le total des mensualités, on se rend compte que la proposition 1 revient moins cher que la proposition 2 même si les premières mensualités sont plus élevées.

A

Présentez au professeur votre étude et justifiez oralement votre choix.

Exercices & Problèmes

Exercices p. 41 et 42

1. QCM

a. u_3 **b.** u_4 **c.** géométrique **d.** $u_n = 2 \times 3^n$

e. 486 **f.** arithmétique **g.** $v_n = -5 + 4(n - 1)$

h. 31

› Déterminer la nature d'une suite et sa raison

2. a. C'est une suite arithmétique de raison $r = 1{,}1$.

b. Le sixième terme est 15,6.

c. $u_n = 10{,}1 + (n - 1) \times 1{,}1$.

3. a. Cette suite est géométrique car les rapports $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ sont égaux.

$\frac{u_1}{u_0} = \frac{16}{64} = 0{,}25$; $\frac{u_2}{u_1} = \frac{4}{16} = 0{,}25$; $\frac{u_3}{u_2} = \frac{1}{4} = 0{,}25$;

$\frac{u_4}{u_3} = \frac{0{,}25}{1} = 0{,}25$

b. La raison est 0,25.

c. $u_n = 64 \times 0{,}25^n$

d. Le 10e terme de la suite est u_9.
$u_9 = 64 \times 0{,}25^9 \approx 2{,}44.10^{-4}$

4. Par lecture graphique, on trouve $u_1 = -0{,}5$, $u_2 = 1$, $u_3 = 3{,}5$, $u_4 = 7$ et $u_5 = 11{,}5$
$u_2 - u_1 \neq u_3 - u_2$, la suite n'est pas arithmétique.
$\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_3}{u_2}$ la suite n'est pas géométrique. La suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

5. a. suite arithmétique ; $u_1 = 0{,}75$; $r = 2$.

b. suite géométrique ; $u_1 = 0{,}1$; $q = 10$.

c. suite arithmétique ; $u_1 = -7{,}7$; $r = 0{,}3$.

d. suite arithmétique ; $u_1 = 1{,}75$; $r = -3$.

e. suite géométrique ; $u_1 = -12$; $q = 2{,}3$.

6. Suite n° 1
$u_1 = 100$; $r = -10$; $u_n = 100 - 10(n - 1)$.
Suite n° 2
$u_1 = -15$; $r = 20$; $u_n = -15 + 20(n - 1)$.

› Calculer les termes d'une suite

7. u_{62} est le 63e terme de la suite (u_n).
$u_{62} = 13 + 62 \times (-1{,}4) = -73{,}8$

8. v_{20} est le 20e terme de la suite (v_n).
$v_{20} = 0{,}000\,15 \times 4^{19}$
$v_{20} \approx 41\,231\,686{,}04$

9. a. Cette suite est géométrique.

b. $q = 2{,}1$ et $u_1 = 0{,}7$.

c. $u_{21} = 0{,}7 \times 2{,}1^{20}$
$u_{21} \approx 1\,947\,529$

10. a. Cette suite est arithmétique.

b. $r = 4$ et $v_0 = -1$

c. $v_{1\,000} = 4 \times 1\,000 - 1 = 3\,999$

Problèmes p. 42 à 44

› Problème 1

Régime amaigrissant

1. $u_{30} = 3\,000 + 29 \times (-20)$
$u_{30} = 2\,420$
$v_{30} = 3\,000 \times 0{,}99^{29}$
$v_{30} \approx 2\,241{,}51$
Ni Alex, ni Medhi n'aura atteint l'objectif de 1 800 kcal le 30e jour.

2. En utilisant la calculatrice ou le tableur, on trouve qu'Alex atteindra 1 800 kcal le 61e jour et Medhi le 52e. C'est donc Medhi qui atteint l'objectif en premier.

› Problème 2

Augmentation de capital

1. $u_1 = 51\,625$ et $u_2 = 53\,302{,}812\,5$

2. La suite (u_n) est géométrique.

3. La raison de la suite est 1,032 5.

4. $u_{10} = 50\,000 \times 1{,}0325^{10}$
$u_{10} \approx 68\,844{,}72$
La valeur acquise, au bout de 10 ans, en plaçant le capital sur ce compte est 68 844,72 euros.

› Problème 3

1. a. La raison de la suite est $r = 30\,000$.

b. $C_n = 300\,000 + n \times 30\,000$.

2. Fin 2020, le chiffre d'affaires sera 600 000 € car :
$C_{10} = 300\,000 + 10 \times 30\,000 = 600\,000$.

3. Au bout de la 24ᵉ année, le capital dépassera 1 000 000 d'euros.
Remarque : pour trouver ce résultat, on peut utiliser un tableur, une calculatrice graphique ou résoudre, par le calcul, l'inéquation $C_n > 1\,000\,000$.

› Problème 4

1. =B2 + \$B\$2*0,04.

2. =\$C\$2*1,035^A3.

3. Voir tableau.

	A	B	C
1	Rang n de l'année	Capital acquis par Miguel	Capital acquis par Julien
2	0	1 500,00 €	1 500,00 €
3	1	1 560,00 €	1 552,50 €
4	2	1 620,00 €	1 606,84 €
5	3	1 680,00 €	1 663,08 €
6	4	1 740,00 €	1 721,28 €
7	5	1 800,00 €	1 781,53 €
8	6	1 860,00 €	1 843,88 €
9	7	1 920,00 €	1 908,42 €
10	8	1 980,00 €	1 975,21 €
11	9	2 040,00 €	2 044,35 €
12	10	2 100,00 €	2 115,90 €
13	11	2 160,00 €	2 189,95 €
14	12	2 220,00 €	2 266,60 €
15	13	2 280,00 €	2 345,93 €
16	14	2 340,00 €	2 428,04 €
17	15	2 400,00 €	2 513,02 €

4. Au bout de 8 ans, Miguel a le capital acquis le plus important.
Au bout de 15 ans, Julien a acquis le plus grand capital.

› Problème 5

Choix d'un crédit

Partie I : Proposition de la banque BB

1. Les remboursements mensuels baissent de 2 % chaque mois par rapport au mois précédent donc :
$1\,200 \times 2 \div 100 = 24$
$1\,200 - 24 = 1\,176$ donc $u_2 = 1\,176$.
De même :
$1\,176 \times 2 \div 100 = 23{,}52$
$1\,176 - 23{,}52 = 1\,152{,}48$ donc $u_3 = 1\,152{,}48$.

2. $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{1\,176}{1\,200} = 0{,}98$ et $\dfrac{u_3}{u_2} = \dfrac{1\,152{,}48}{1\,176} = 0{,}98$; les rapports étant égaux et la diminution toujours de 2 %, la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,98.

Partie II : Utilisation d'un tableur

1. Dans la cellule C3, on peut écrire la formule =C2*0,98.

2. Voir le tableau ci-dessous.
Le montant des mensualités la dernière année de remboursement serait de 817,48 €.

Partie III : Comparaison des deux propositions

1. Voir les colonnes E et F du tableau ci-dessous pour connaître le montant total des remboursements.

2. La banque qui propose la formule où le montant total est le plus faible est la banque BB, c'est celle que le couple a intérêt à choisir s'il veut dépenser le moins d'argent sur 20 ans.

	A	B	C	D	E	F
1	Année n de remboursement	Montant (en €) du remboursement mensuel lors de la n ième année Banque AA	Montant (en €) du remboursement mensuel lors de la n ième année Banque BB		Montant (en €) du remboursement annuel lors de la n ième année Banque AA	Montant (en €) du remboursement annuel lors de la n ième année Banque BB
2	1	1 047	1 200,00		12564	14400
3	2	1 047	1 176,00		12564	14112,00
4	3	1 047	1 152,48		12564	13829,76
5	4	1 047	1 129,43		12564	[illegible]
6	5	1 047	1 106,84		12564	[illegible]
7	6	1 047	1 084,71		12564	[illegible]
8	7	1 047	1 063,01		12564	[illegible]
9	8	1 047	1 041,75		12564	[illegible]
10	9	1 047	1 020,92		12564	[illegible]
11	10	1 047	1 000,50		12564	[illegible]
12	11	1 047	980,49		12564	[illegible]
13	12	1 047	960,88		12564	[illegible]
14	13	1 047	941,66		12564	[illegible]
15	14	1 047	922,83		12564	[illegible]
16	15	1 047	904,37		12564	[illegible]
17	16	1 047	886,28		12564	[illegible]
18	17	1 047	868,56		12564	[illegible]
19	18	1 047	851,19		12564	[illegible]
20	19	1 047	834,16		12564	[illegible]
21	20	1 047	817,48		12564	[illegible]
22				Total des remboursements	251280	[illegible]

› Problème 6

1. Si la valeur de la voiture diminue de 20 % chaque année par rapport à l'année précédente, cela revient à multiplier par 0,80 la valeur de la voiture pour connaître sa valeur de revente l'année suivante. La suite (V_n) est donc une suite géométrique de raison 0,80.

2. $V_5 = V_0 \times q^5$
$V_5 = 14\,000 \times 0{,}80^5$
$V_5 = 4\,587{,}52$ €.

3. a. Si le prix des voitures augmente de 2 % chaque année entre 2010 et 2015 alors, une voiture valant 14 000 € en 2010 vaudra environ 15 460 € en 2015 car : $14\,000 \times 1{,}02^5 \approx 15\,457{,}13$
soit environ 15 460 €.

b. Romain devra donc dépenser environ 10 860 € pour remplacer sa voiture en 2015 car :
$15\,460 - 4\,600 = 10\,860$.

› Problème 7

Choix d'un contrat

1. La formule à écrire dans la cellule B3 est =B2+3,25.

2. La formule à écrire dans la cellule E3 est =E2*1,02.

3. Voir le tableau ci-dessous :

	A	B	C	D	E	F
1	Année	Entreprise CHAUFECO versements annuels	Entreprise CHAUFECO Cumul des versements		Entreprise CHAUFMAX versements annuels	Entreprise CHAUFMAX Cumul des versements
2	2011	150,00 €	150,00 €		150	150,00 €
3	2012	153,25 €	303,25 €		153,00 €	303,00 €
4	2013	156,50 €	459,75 €		156,06 €	459,06 €
5	2014	159,75 €	619,50 €		159,18 €	618,24 €
6	2015	163,00 €	782,50 €		162,36 €	780,61 €
7	2016	166,25 €	948,75 €		165,61 €	946,22 €
8	2017	169,50 €	1 118,25 €		168,92 €	1 115,14 €
9	2018	172,75 €	1 291,00 €		172,30 €	1 287,45 €
10	2019	176,00 €	1 467,00 €		175,75 €	1 463,19 €
11	2020	179,25 €	1 646,25 €		179,26 €	1 642,46 €

4. Les montants inscrits dans les cellules C11 et F11 correspondent au total des versements obtenus pour chaque contrat.

5. Le contrat le plus intéressant est le contrat Chaufmax (même si l'écart entre les deux contrats n'est pas très important).

Je me teste

(Livre élève pages 45 et 46)

EXERCICE 1

Partie A Augmentation de loyer

Une famille loue un appartement depuis le 1er janvier 2007. Le loyer s'élevait alors à 800 € par mois. Il a été précisé dans le contrat de location que ce loyer serait révisé le 1er janvier de chaque année. Le tableau suivant donne le montant mensuel des loyers payés par cette famille de 2007 à 2010.

Année	2007	2008	2009	2010
Rang	0	1	2	3
Montant mensuel du loyer (en euros)	800	840	882	926,10

On désigne par U_n le montant mensuel du loyer au 1er janvier de la n-ième année.
Le premier terme de la suite est $U_0 = 800$.

1 Donner la nature de la suite (U_n) ainsi que sa raison.

On constate que les rapports $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ sont constants car $\frac{926,10}{882} = \frac{882}{840} = \frac{840}{800} = 1,05$.

La suite (U_n) est donc une suite géométrique de raison 1,05.

2 Exprimer U_n en fonction de n.

$U_n = U_0 \times q^n$ soit $U_n = 800 \times 1,05^n$.

3 Calculer le montant mensuel du loyer au premier janvier 2015.

$U_8 = 800 \times 1,05^8 \approx 1\,181,96$. Le montant mensuel en 2015 sera 1 181,96 €.

4 Cette famille s'est fixé comme objectif d'acheter une maison lorsque le montant des mensualités aura augmenté de 40 % par rapport à sa valeur initiale. Si l'évolution du loyer reste la même, en quelle année cette famille devra-t-elle prévoir l'achat de la maison ?

Le loyer dépassera 40 % de sa valeur initiale (soit 1 120 €) en 2014, car $U_7 \approx 1\,125,68$.

A

Appelez le professeur pour présenter oralement votre réponse à la question 4.

Partie B Épargner en vue d'un achat

Pour acheter une maison, un couple décide de placer une somme de 20 000 € à la banque. Ils ont contacté plusieurs banques et hésitent entre deux placements :

– placement 1 : intérêt composé à 4 % par an ;

– placement 2 : intérêt simple à 5 % par an.

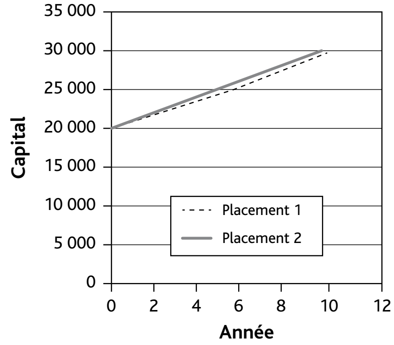
On désigne par C_n le capital obtenu après n années avec le placement 1. On note $C_0 = 20\,000$. On désigne par C'_n le capital obtenu après n années avec le placement 2. On note $C'_0 = 20\,000$.

1 Donner, en fonction de n, l'expression des termes C_n et C'_n.

Placement 1 : $C_n = C_0 \times q^n$ soit $C_n = 20\,000 \times 1,04^n$

Placement 2 : $\frac{5}{100} \times 20\,000 = 1000$ soit 1 000 € d'intérêt donc $C_n' = 2\,000 + 1\,000n$

2 En utilisant une calculatrice graphique ou un tableur, proposer un graphique montrant l'évolution du capital sur une durée de 10 ans.



3 Sachant que ce couple voudrait obtenir le plus rapidement possible un capital de 30 000 €, quel placement a-t-il intérêt à choisir ?

Le placement 2 permet d'atteindre le plus rapidement 30 000 €.

A

Appelez le professeur pour présenter votre démarche.

EXERCICE 2

Deux villes A et B ont décidé de lancer un programme de construction de logements sociaux neufs. En 2009, il y avait 3 460 logements sociaux dans la ville A et 2 740 dans la ville B. Le projet de la ville A consiste en la construction, à partir de 2010, de 160 logements sociaux supplémentaires chaque année. Celui de la ville B consiste à augmenter à partir de 2010 le nombre de logements sociaux de 7 % chaque année.

1 On note a_n le nombre de logements sociaux dans la ville A au cours de l'année $2009 + n$.
On donne $a_0 = 3\ 460$.

a. Donner l'expression du terme a_n en fonction de n et préciser la nature de la suite (a_n).

Chaque année, on ajoute 160 logements, il s'agit donc d'une suite arithmétique de raison 160 et $a_n = a_0 + n \times r$.
donc $a_n = 3\ 460 + 160n$.

b. En 2019, le nombre de logements de la ville A aura-t-il doublé ?

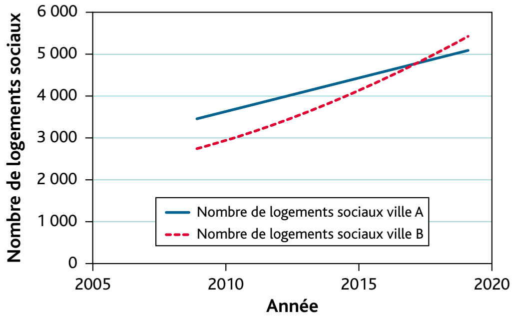
En 2019, il y aura 5 060 logements donc le nombre de logements n'aura pas doublé. ($u_{10} = 3\ 460 + 160 \times 10 = 5\ 060$)

2 On considère la suite (b_n) dont les termes représentent le nombre de logements sociaux dans la ville B. L'expression du terme de rang n est : $b_n = 2\ 740 \times (1{,}07)^n$ et $b_0 = 2\ 740$.
Donner la nature de la suite (b_n) et préciser sa raison.

La suite (b_n) est une suite géométrique de raison 1,07 car chaque année, le nombre de logements augmente de 7 %.

3 Pour comparer les deux projets, on utilise la feuille de calcul d'un tableur.

a. Reproduire la feuille de calcul ci-contre dans votre logiciel et, à l'aide des fonctionnalités, calculer les nombres de logements sociaux jusqu'en 2019.



	A	B	C	D
1	Année	Rang de l'année	Nombre de logements sociaux ville A	Nombre de logements sociaux ville B
2	2009	0	3 460	2740
3	2010	1	3 620	2931,8
4	2011	2	3 780	3137,026
5	2012	3	3 940	3356,61782
6	2013	4	4 100	3591,58107
7	2014	5	4 260	3842,99174
8	2015	6	4 420	4112,00116
9	2016	7	4 580	4399,84125
10	2017	8	4 740	4707,83013
11	2018	9	4 900	5037,37824
12	2019	10	5 060	5389,99472
13–15	total des logements sociaux construits entre 2010 et 2019		1600	2649,99472

b. Comparer l'évolution du nombre de logements sociaux pour les deux villes entre 2010 et 2019.

Le nombre de logements sociaux augmente plus vite avec la ville B qu'avec la ville A. À partir de 2018, il y a davantage de logements sociaux dans la ville B.

c. Quelle est celle des deux villes qui aura construit sur cette période le plus grand nombre de logements sociaux ?

C'est la ville B qui aura construit le plus de logements (≈ 2 650 pour la ville B contre 1 600 pour la ville A).

A

Appelez le professeur pour présenter oralement la réponse c.

10 Probabilité d'un événement

(Livre élève pages 47 et 48)

Capacité
- Calculer la probabilité d'un événement par addition des probabilités d'issues

1 Utiliser le langage des ensembles

Les dés sont jetés !

1. Calcul en situation d'équiprobabilité

On joue avec un dé cubique possédant 6 faces numérotées de 1 à 6.
On lance le dé, supposé équilibré.
Chaque numéro de la face supérieure correspond à une issue.

L'**ensemble** des issues est appelé **univers** et désigné par la lettre **Ω** (lire « oméga »).

On note $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

a. Le dé étant supposé équilibré, quelle probabilité attribue-t-on à chacune des issues ?

$\frac{1}{6}$.

Lorsque toutes les issues ont la même probabilité, on dit qu'il y a **équiprobabilité**.

b. On considère l'événement A : « Le numéro sorti est supérieur ou égal à 4 ». Écrire A sous forme d'ensemble.

$A = \{4, 5, 6\}$

Un ensemble se note entre accolades : $\{a, b, c, d\}$.

c. On désigne par **cas favorables** à A, les éléments de A.

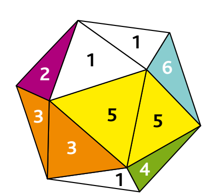
Combien y a-t-il de cas favorables à A ? Trois cas favorables à A.

d. En situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement A s'obtient par $P(A) = \dfrac{\text{nombre de cas favorables à } A}{\text{nombre de cas possibles}}$.

Calculer $P(A)$. $P(A) = \frac{3}{6} = 0{,}5$.

2. Calcul en situation de non-équiprobabilité

On joue avec un dé régulier possédant 20 faces numérotées de 1 à 6. Il y a :
5 faces n° 1 ; 5 faces n° 2 ; 4 faces n° 3 ; 3 faces n° 4 ; 2 faces n° 5 ; 1 face n° 6.
On lance le dé, supposé équilibré.



Une **issue** correspond au numéro de la face supérieure.

L'ensemble des issues est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

a. Compléter le tableau suivant :

Issue	1	2	3	4	5	6
Probabilité	0,25	0,25	0,2	0,15	0,1	0,05

A-t-on équiprobabilité des six cas possibles ?

Non.

b. On considère l'événement B : « Le numéro sorti est pair ». Écrire B sous forme d'ensemble.

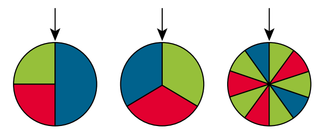
$B = \{2, 4, 6\}$.

c. La probabilité d'un événement est donnée par la somme des probabilités des issues qui le composent. Calculer $P(B)$.

$P(B) = 0{,}25 + 0{,}15 + 0{,}05 = 0{,}45$.

2 Déterminer un modèle de probabilité

Quelles chances à la roulette ?



Pour chacune des roulettes, ci-contre, donner la probabilité de chacun des événements suivants :
B : « la roulette s'arrête dans le secteur bleu » ; R : « la roulette s'arrête dans le secteur rouge » ; V : « la roulette s'arrête dans le secteur vert ».

Roulette 1 : $P(B) = \frac{1}{2}$; $P(R) = \frac{1}{4}$; $P(V) = \frac{1}{4}$.

Roulette 2 : $P(B) = \frac{1}{3}$; $P(R) = \frac{1}{3}$; $P(V) = \frac{1}{3}$.

Roulette 3 : $P(B) = \frac{2}{10} = 0{,}2$; $P(R) = \frac{3}{10} = 0{,}3$; $P(V) = \frac{5}{10} = 0{,}5$.

Comment calculer une probabilité par addition de probabilités d'issues ?

Un dé cubique est truqué de telle sorte que la probabilité d'apparition du 6 est 0,4 et que les chances d'apparition des autres faces sont les mêmes.

a. Déterminer la probabilité de chaque issue.

- Penser que la somme des probabilités de toutes les issues vaut 1.

On a $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$ et, d'après l'énoncé, $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5$ avec $p_6 = 0{,}4$. D'où :
$5p_1 + 0{,}4 = 1$, puis $p_1 = \frac{0{,}6}{5} = 0{,}12$.

- Résumer dans un tableau les probabilités de chaque issue :

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,4

b. Calculer la probabilité des événements suivants :
***A* : « Le dé tombe sur l'as (c'est-à-dire, le 1) » ; *B* : « Le dé tombe sur un nombre pair ».**

- Calculer la probabilité d'un événement en ajoutant les probabilités des issues qu'il comporte.

On a $P(A) = P(\{1\}) = 0{,}12$ et

$P(B) = P(\{2, 4, 6\}) = 0{,}12 + 0{,}12 + 0{,}4 = 0{,}64$

RÉPONSES
Exercice

a. On a $5 \times p_1 + p_6 = 1$ d'où
$5 \times p_1 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$ donc
$p_1 = 0{,}04 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5$.

b. On a $A = \{2, 4, 6\}$ d'où
$P(A) = p_2 + p_4 + p_6 = 0{,}04 + 0{,}04 + 0{,}8 = 0{,}88$.

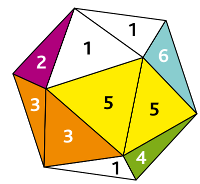
4. PROBABILITÉS

11 Opérations sur les événements

Capacités
- Calculer la probabilité d'un événement contraire, de la réunion ou de l'intersection d'événements
- Utiliser un arbre, un tableau, un diagramme

(Livre élève pages 49 et 50)

Faire des opérations avec les événements



On joue avec un dé régulier possédant 20 faces numérotées de 1 à 6.
Il y a : 5 faces n° 1 ; 5 faces n° 2 ; 4 faces n° 3 ; 3 faces n° 4 ; 2 faces n° 5 ; 1 face n° 6.
On lance le dé, supposé équilibré.
On modélise le lancer de ce dé avec le tableau suivant :

Issue	1	2	3	4	5	6
Probabilité	0,25	0,25	0,20	0,15	0,10	0,05

1. Événement contraire

On considère l'événement A : « Le numéro sorti est pair ≈.
On désigne par $\bar{A}$ (lire « A barre ≈) l'événement contraire de A.

a. Écrire A sous forme d'ensemble et calculer $P(A)$.

$A = \{2, 4, 6\}$.

$P(A) = 0{,}25 + 0{,}15 + 0{,}05 = 0{,}45$.

b. Définir $\bar{A}$ par une phrase.

$\bar{A}$: « Le numéro sorti est impair ≈.

c. Écrire $\bar{A}$ sous forme d'ensemble et calculer $P(\bar{A})$.

$\bar{A} = \{1, 3, 5\}$.

$P(\bar{A}) = 0{,}25 + 0{,}20 + 0{,}10 = 0{,}55$.

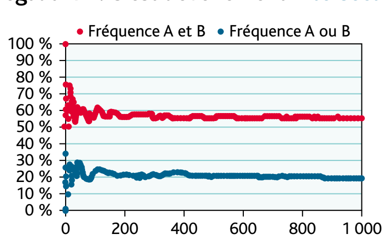
d. Quelle relation peut-on écrire entre $P(\bar{A})$ et $P(A)$?

$P(A) + P(\bar{A}) = 1$ ou $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

2. Union et intersection

On considère les événements :
A : « Le numéro sorti est pair ≈ et B : « Le numéro sorti est supérieur ou égal à 4 ≈.
On note $A \cap B$ l'événement : « Le numéro sorti est pair et il est supérieur ou égal à 4 ≈. C'est l'événement intersection de A et B.

∩ se lit « inter ≈.
∪ se lit « union ≈.



On note A ≈ B l'événement : « Le numéro sorti est pair ou il est supérieur ou égal à 4 ≈. C'est l'événement réunion de A et B.
On a simulé 1 000 lancers du dé et représenté l'évolution de la fréquence des événements $A \cap B$ et A ≈ B durant ces lancers (d'autres simulations sont disponibles sur le fichier « **04_de_icosaedrique.xls** ≈ ou « **04_de_icosaedrique.ods** ≈, en faisant F9).

a. Décrire l'aspect du graphique. Les fréquences se stabilisent.

b. Donner, d'après ce graphique, une estimation des probabilités $P(A \cap B)$ et $P(A \cup B)$.

$P(A \cap B) \approx 0{,}20$; $P(A \cup B) \approx 0{,}55$.

c. Écrire l'ensemble des issues qui réalisent à la fois A **et** B. $A \cap B = \{4, 6\}$.

d. Utiliser le tableau de l'énoncé pour calculer $P(A \cap B)$.

$P(A \cap B) = 0{,}15 + 0{,}05 = 0{,}20$.

Comparer avec l'estimation donnée à la question 2.b.

Cela confirme l'estimation.

e. Écrire l'ensemble des issues qui réalisent A **ou** B (A seul, B seul, ou les deux). $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$.

f. Calculer $P(A \cup B)$ et comparer avec l'estimation donnée à la question 1.b.

$P(A \cup B) = 0{,}25 + 0{,}15 + 0{,}10 + 0{,}05 = 0{,}55$.

g. Comparer $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ et $P(A \cup B)$.

$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}45 + 0{,}30 - 0{,}20 = 0{,}55 = P(A \cup B)$.

Comment utiliser un tableau pour calculer la probabilité d'une réunion d'événements ?

Pour 500 personnes respirant des poussières pendant leur activité professionnelle, on dispose des données ci-contre. On prélève au hasard le dossier d'une personne parmi les 500.

On note A l'événement « Le dossier est celui d'une personne atteinte de toux chronique ≈ et F « Le dossier est celui d'un fumeur ≈.

	Atteints de toux chronique	Non atteints de toux chronique	Total
Fumeurs	60	140	200
Non-fumeurs	40	260	300
Total	100	400	500

a. Transformer le tableau d'effectifs en un tableau de probabilités.

- Le tirage de chaque dossier étant équiprobable, on utilise la formule (nombre de cas favorables) divisé par (nombre de cas possibles) pour compléter le tableau de probabilités.

	A	$\overline{A}$	Total
F	$\frac{60}{500} = 0{,}12$	$\frac{140}{500} = 0{,}28$	0,4
$\overline{F}$	$\frac{40}{500} = 0{,}08$	$\frac{260}{500} = 0{,}52$	0,6
Total	0,2	0,8	1

b. Calculer la probabilité de l'événement A ≈ F.

- Pour $P(A \cup F)$, on fait la somme des cases centrales correspondant à A ou F (en bleu) :

$P(A \cup F) = 0{,}12 + 0{,}28 + 0{,}08$
$= 0{,}48$.

RÉPONSES

Exercice

a.

	Hommes : B	Femmes : $\overline{B}$	Total
Moins de 25 ans : A	0,121	0,079	0,2
Plus de 25 ans : $\overline{A}$	0,396	0,404	0,8
Total	0,517	0,483	1

b. $P(A \cup B) = 0{,}121 + 0{,}079 + 0{,}396 = 0{,}596$.

(Livre élève pages 51 et 52)

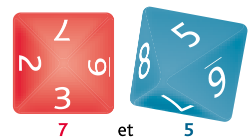
12 J'utilise un logiciel (tableur)

Expérimenter intersection et réunion

Dés octaédriques et fiabilité de composants électroniques

1. Simulation de lancers de dés octaédriques

On lance deux dés réguliers à huit faces (numérotées de 1 à 8), supposés équilibrés, un dé rouge et un dé bleu.
On note A l'événement : « le dé rouge tombe sur la face 8 ≈, et B l'événement : « le dé bleu tombe sur la face 8 ≈.



a. À quel événement correspond « faire un double 8 ≈ ?

A et B, c'est-à-dire $A \cap B$.

b. Énoncer l'événement $A \cup B$ à l'aide de « au moins ≈.

$A \cup B$: « l'un au moins des deux dés tombe sur la face 8 ≈.

c. Quel est, des deux événements $A \cap B$ et $A \cup B$, celui dont la probabilité vous semble la plus faible ?

$A \cap B$.

Ouvrir le fichier « **06_des_octaedriques.xls** ≈ ou « **06_des_octaedriques.ods** ≈ qui simule 1 000 lancers.

d. Que simule l'instruction =ENT(8*ALEA()+1), entrée en B4 ?

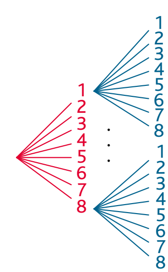
Le lancer du dé rouge.

e. La cellule E4 contient l'instruction =OU(B4=8;C4=8). Quand affiche-t-elle « VRAI ≈ et quand affiche-t-elle « FAUX ≈ ?

E4 affiche VRAI quand B4 vaut 8 ou C4 vaut 8.

f. En faisant plusieurs fois F9, donner, à l'aide du graphique, une estimation des probabilités des événements $A \cap B$ et $A \cup B$. $P(A \cap B) \approx 0{,}24$; $P(A \cup B) \approx 0{,}02$.

2. Calcul de probabilités



a. Montrer, à l'aide de l'arbre (incomplet) ci-contre, que l'on peut considérer 64 issues équiprobables. Il y a $8 \times 8 = 64$ chemins possibles.

Quelle est la probabilité d'une issue ? $\frac{1}{64}$

b. Calculer $P(A)$, $P(B)$ et $P(A \cap B)$.

$P(A) = \frac{1}{8}$; $P(B) = \frac{1}{8}$; $P(A \cap B) = \frac{1}{64} \approx 0{,}016$.

c. En déduire $P(A \cup B)$. $P(A \cup B) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{64} \approx 0{,}234$.

3. Application aux réseaux

On considère deux réseaux comportant chacun deux composants électroniques identiques. La probabilité de panne de chaque composant, durant la période de garantie, est $\frac{1}{8}$.

Le réseau 1 ne tombe en panne que si les deux composants tombent en panne. Le réseau 2 tombe en panne dès qu'un des deux composants tombe en panne.
Déduire de la partie précédente, la probabilité de panne, durant la période de garantie, de chacun des deux réseaux.

Probabilité de panne du réseau 1 : $\frac{1}{64} \approx 0{,}016$.

Probabilité de panne du réseau 2 : $\frac{15}{64} \approx 0{,}234$.

J'utilise un logiciel (tableur)

Estimer puis calculer une probabilité

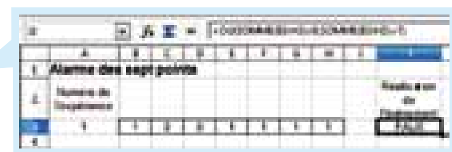
L'alarme des sept points

Une entreprise doit contrôler la qualité d'une eau minérale qu'elle produit, et dont la teneur en calcium est de 80 mg par litre. Un technicien prélève régulièrement des échantillons aléatoires en fin de fabrication dont il reporte la teneur moyenne en calcium sur un graphique. S'il constate une série de sept points consécutifs supérieurs à 80 ou inférieurs à 80, il considère ce résultat comme suspect et alerte la fabrication.

L'objectif de cette activité est de comprendre comment fonctionne cette alarme.

On considère qu'une teneur moyenne a une chance sur deux d'être supérieure ou inférieure à 80, ce qui nous place dans la situation de sept lancers consécutifs à pile ou face d'une pièce supposée équilibrée.

1. Simulation à l'aide d'un tableur



Préparer une feuille de calcul comme ci-contre.

- En B3 entrer la formule =ENT(ALEA()+0,5) puis recopier jusqu'en H3.
- En J3 entrer la formule =OU(SOMME(B3:H3)=0;SOMME(B3:H3)=7) .

a. Que simule la formule entrée en B3 ? Un lancer de pile ou face : 1 ou 0.

b. Quand la cellule J3 affiche-t-elle « FAUX ≈ ? et « VRAI ≈ ? J3 affiche VRAI lorsqu'il y a sept « 0 ≈ ou sept « 1 ≈ et FAUX sinon.

c. Faire plusieurs fois F9. Observe-t-on souvent l'affichage « VRAI ≈ ? C'est rare.

- Sélectionner la ligne 3 et la recopier jusqu'à la ligne 10 002 pour effectuer 10 000 simulations.
- Calculer la fréquence d'apparition de « VRAI ≈, à l'aide de l'instruction =NB.SI(J3:J10002;"VRAI")/10000 .

d. En faisant plusieurs fois F9, estimer la probabilité d'avoir sept « pile ≈ ou sept « face ≈ après sept lancers d'une pièce supposée équilibrée. La probabilité d'avoir sept « pile ≈ ou sept « face ≈ vaut environ 0,016.

A

Appelez le professeur pour argumenter votre réponse à la question précédente.

2. Calcul à l'aide d'un arbre

Ne cherchez pas à faire un arbre complet mais à comprendre quelle opération conduit à 128.

a. Montrer, à l'aide d'un arbre, que l'on peut considérer 128 issues équiprobables.

Il y a $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^7 = 128$ chemins.

b. Calculer la probabilité d'avoir sept « pile ≈ ou sept « face ≈ après sept lancers d'une pièce supposée équilibrée et comparer avec l'estimation de la question 1.d.

Il y a 2 issues favorables sur 128 possibles (équiprobables) d'où la probabilité $\frac{2}{2^7} = \frac{1}{2^6} \approx 0{,}0156$.

c. Justifier l'utilisation de la méthode des sept points. Lorsqu'une alerte est donnée, la probabilité que ce soit une fausse alerte est faible.

Exercices & Problèmes

Exercices p. 55 à 57

1. QCM

a. $P(B \cap C) = 0{,}2$.

b. $P(B \cup C) = 0{,}8$.

c. $\frac{4}{30}$.

d. $\frac{7}{12}$.

e. $P(A \cap C) = 0{,}14$.

f. $P(C) = 0{,}22$.

g. $P(A) = 1 - P(B)$;

h. $P(A \cup B) = 0{,}5$.

i. $P(A \cap B) = 0{,}1$.

j. $P(A \cap B) = 0$.

› Déterminer un modèle de probabilité

2. a. Méthode 2.

b. Méthode 1.

c. Méthode 2.

d. Méthode 1.

› Calculer une probabilité en situation d'équiprobabilité

3. On peut dresser le tableau suivant.

	Hypothèse 1	Hypothèse 2	Total
Aubois	45	92	137
Bellevie	156	85	241
Total	201	177	378

a. Il y a 137 bulletins provenant d'Aubois.
La probabilité que le bulletin tiré provienne d'Aubois est $\frac{137}{378} \approx 0{,}36$ (car on est dans une situation d'équiprobabilité).

b. Il y a 201 bulletins en faveur de l'hypothèse 1.
La probabilité que le bulletin tiré soit en faveur de l'hypothèse 1 est $\frac{201}{378} \approx 0{,}53$.

c. Il y a 45 bulletin provenant d'Aubois et en faveur de l'hypothèse 1.
La probabilité que le bulletin tiré provienne d'Aubois et soit en faveur de l'hypothèse 1 est $\frac{45}{378} \approx 0{,}12$.

4. a.

Salaires mensuels	Effectifs
[1 000 ; 1 400[	80
[1 400 ; 1 800[	40
[1 800 ; 2 200[	40
[2 200 ; 2 600[	30
[2 600 ; 3 000]	10
Total	200

b. $P(A) = \frac{80}{200} = 0{,}4$.

$P(B) = \frac{40}{200} = 0{,}2$.

c. $A \cup B$: « Le salarié a un salaire compris entre 1 000 et 1 800 euros (1 800 exclus) ».
$\overline{A}$: « Le salarié a un salaire supérieur ou égal à 1 400 euros ».

d. $P(A \cup B) = \frac{100}{200} = 0{,}5$ et $P(\overline{A}) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$.

› Passer du langage des probabilités au langage courant et réciproquement

5. a. $\overline{A}$: « la carte tirée n'est pas un cœur ».

b. $A \cap B$: « la carte tirée est une figure de cœur ».

c. Il y a 3 figures de cœur donc
$P(A \cap B) = \frac{3}{32} = 0{,}9375$.

d. $A \cup B$: « la carte tirée est un cœur ou une figure ».

e. Il y a 8 cartes de cœur et 9 figures qui ne sont pas de cœur, donc 17 cartes pouvant conduire à $A \cup B$.
Donc $P(A \cup B) = \frac{17}{32} = 0{,}53125$.

Remarque : on constate que
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{8}{32} + \frac{12}{32} - \frac{3}{32}$.

6. Figure 1 : jaune A ; bleu $\overline{A}$.
Figure 2 : jaune $A \cup B$; bleu $\overline{A} \cap \overline{B}$.
Figure 3 : jaune $A \cup \overline{B}$; bleu $\overline{A} \cap B$.

› Utiliser un tableau, un arbre, un diagramme

7. a.

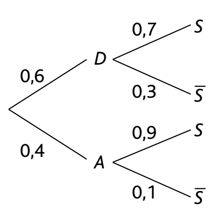
	Coupures de 10 €	Coupures de 20 €	Coupures de 50 €	Total
Billets falsifiés	0	3	2	5
Billets non falsifiés	600	797	598	1 995
Total	600	800	600	2 000

b.

	D	V	C	Total
F	0	0,0015	0,001	0,0025
$\overline{F}$	0,3	0,3985	0,299	0,9975
Total	0,3	0,4	0,3	1

c. $\overline{F}$: « Le billet choisi n'est pas falsifié ».
$P(\overline{F}) = 0,9975$.
$V \cap F$: « Le billet choisi est un billet de 20 euros falsifié ». $P(V \cap F) = 0,0015$.
$V \cup C$: « Le billet choisi est un billet de 20 euros ou un billet de 50 euros ».
$P(V \cup C) = 0,4 + 0,3 = 0,7$.

8. a.



b. $A \cap \overline{S}$ correspond à l'événement : « Le tirage au sort a désigné un client de la formule aventure non satisfait ».
$P(A \cap \overline{S}) = 0,4 \times 0,1 = 0,04$.

c. $P(\overline{S}) = 0,6 \times 0,3 + 0,4 \times 0,1 = 0,22$.

› Calculer la probabilité de la réunion ou de l'intersection d'événements

9. $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,3 = 0,7$.
$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,5 = 0,5$.
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$= 0,3 + 0,5 - 0,2 = 0,6$.

10. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$= 0,6 + 0,2 - P(A \cap B)$.

a. Si $P(A \cap B) = 0,1$ alors
$P(A \cup B) = 0,6 + 0,2 - 0,1 = 0,7$.

b. Si A et B sont disjoints, $P(A \cap B) = 0$ alors
$P(A \cup B) = 0,6 + 0,2 - 0 = 0,8$.

11. a. $\overline{A}$: « Alex donne un avis défavorable ≈.
$\overline{B}$: « Ben donne un avis défavorable ≈.
$A \cap B$: « Alex et Ben donnent un avis favorable ≈.
$A \cup B$: « Alex ou Ben, au moins, donne un avis favorable ≈.

b. $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,8 = 0,2$.
$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,7 = 0,3$.
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$= 0,8 + 0,7 - 0,6 = 0,9$.

Problèmes p. 57 et 58

› Problème 1

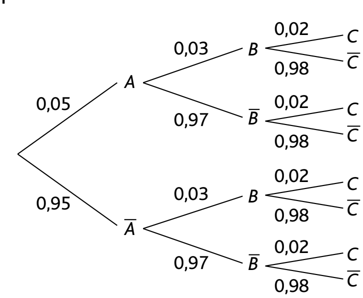
Jackpot !

1. D'après les instructions du tableur, $P(A) = 0,05$; $P(B) = 0,03$ et $P(C) = 0,02$.

2. La cellule D2 affiche $1 \times 1 \times 1 = 1$ (sinon elle affiche 0).

3. L'événement $A \cap B \cap C$ s'est réalisé 4 fois.

4. On peut réaliser l'arbre suivant.

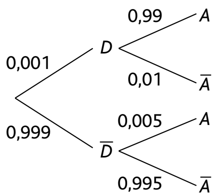


La probabilité de toucher le jackpot est
$0,05 \times 0,03 \times 0,02 = 0,00003$.

› Problème 2

Vraie ou fausse alerte ?

1.



2. La probabilité qu'un jour donné le système de contrôle déclenche une fausse alerte est :
$P(\overline{D} \cap A) = 0{,}999 \times 0{,}005 = 0{,}004\,995$ soit environ 0,5 % des jours où se déclenche une fausse alerte.

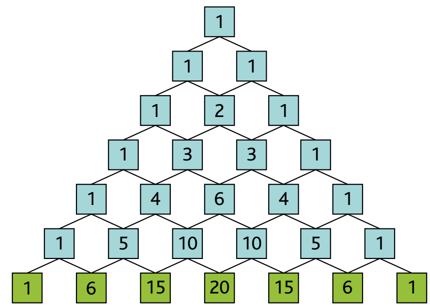
3. $P(A) = 0{,}001 \times 0{,}99 + 0{,}999 \times 0{,}005 = 0{,}005\,985$.
La probabilité qu'un jour donné se déclenche une alerte est 0,005 985 (environ 0,6 % des jours).
Remarque : on constate que le rapport entre les fausses alertes et les alertes est $\dfrac{0{,}004\,995}{0{,}005\,985}$ c'est-à-dire qu'environ 83 % des alertes sont de fausses alertes.

› Problème 3

La planche de Galton

1. On peut estimer p_3 à environ 0,32 et p_6 à environ 0,02.

2. a.



b. Au total, il y a $1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 =$ 64 chemins.

c. En supposant que les 64 chemins sont équiprobables, on en déduit que :

$p_0 = \dfrac{1}{64} \approx 0{,}016$;

$p_1 = \dfrac{6}{64} \approx 0{,}094$;

$p_2 = \dfrac{15}{64} \approx 0{,}234$;

$p_3 = \dfrac{20}{64} \approx 0{,}312\,5$;

$p_4 = \dfrac{15}{64} \approx 0{,}234$;

$p_5 = \dfrac{6}{64} \approx 0{,}094$;

$p_6 = \dfrac{1}{64} \approx 0{,}016$.

Je me teste

(Livre élève pages 59 et 60)

EXERCICE

Un couple désire deux enfants et, si possible, « au moins une fille ». On suppose qu'à chaque naissance, un enfant a une chance sur deux d'être un garçon ou une fille.

Partie A. Simulations

On a simulé la situation sur un tableur.

On a entré en B4 et en C4 la formule =ENT(ALEA()+0,5) puis en D4 la formule =OU(B4=1;C4=1) .

La ligne 4 a ensuite été recopiée vers le bas pour obtenir 10 000 simulations.

C1 fx =NB.SI(D4:D10003;"VRAI")

	A	B	C	D	E
1	Au moins une fille :		7495	fois sur 10 000 simulations	
2					
3	Simulation n°	Enfant 1	Enfant 2	Au moins une fille	
4	1	0	1	VRAI	
5	2	1	1	VRAI	
6	3	0	0	FAUX	
7	4	0	0	FAUX	
8	5	0	0	FAUX	
9	6	1	1	VRAI	

1 À quoi correspondent les valeurs 0 et 1 affichées en colonnes B et C ?

0 correspond à « garçon ».

1 correspond à « fille ».

2 À quoi correspond l'affichage VRAI ou FAUX en colonne D ?

VRAI correspond à « au moins une fille », FAUX sinon.

3 La cellule C1 contient la formule =NB.SI(D4:D10003;"VRAI") .
Interpréter le nombre 7 495 affiché sur l'image d'écran.

Il y a eu 7 495 cas sur 10 000 avec « au moins une fille » sur les deux enfants.

4 En faisant F9, la cellule C1 affiche successivement : 7 495, 7 536, 7 521, 7 435, 7 445.
Proposer une estimation de la probabilité d'avoir au moins une fille lorsque l'on a deux enfants.

La probabilité d'avoir au moins une fille est environ 0,75.

A

Appelez le professeur pour présenter votre proposition.

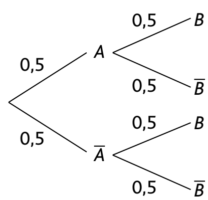
Partie B. Calcul des probabilités

On note A l'événement : « Le premier enfant est une fille ≈ et B l'événement : « Le second enfant est une fille ≈.

1 Écrire à l'aide de A et B l'événement : « L'un des deux enfants, au moins, est une fille ≈.

C'est l'événement $A \cup B$.

2 Compléter l'arbre suivant, en indiquant sur chaque branche la probabilité correspondante.



3 Calculer $P(A \cap B)$.

$P(A \cap B) = 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}25$.

4 Calculer $P(A \cup B)$, puis comparer avec les simulations.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= 0{,}5 + 0{,}5 - 0{,}25$

$= 0{,}75$

L'estimation de la question A.4 est correcte.

13 Fonctions exponentielles

Capacité

- Sur un intervalle donné, étudier et représenter graphiquement les fonctions $x \mapsto q^x$ ($q > 0$ et $q \neq 1$)

(Livre élève pages 61 et 62)

1 Passer d'une suite géométrique à une fonction exponentielle

Une belle plante à croissance exponentielle

Une plante sortant de terre a une hauteur de 1 mm. On l'arrose chaque jour, pendant quatre semaines, avec un engrais miraculeux et sa taille est multipliée par 10 toutes les semaines.

1. Étude d'une suite

On note u_0 la taille de la plante, en mm, au début de l'expérience, u_1 celle au bout d'une semaine, u_2 celle au bout de 2 semaines. On définit de même u_3 et u_4.

On appelle (u_n) la suite $(u_0, u_1, u_2, u_3, u_4)$.

a. Donner la valeur de u_0 et calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.

$u_0 = 1$; $u_1 = 10$; $u_2 = 100$; $u_3 = 1\,000$; $u_4 = 10\,000$.

b. La suite (u_n) est-elle arithmétique ou géométrique ? Donner sa raison.

La suite (u_n) est géométrique ; sa raison est 10.

c. Exprimer u_n en fonction de n : $u_n = 1 \times 10^n$.

2. Passage à une fonction exponentielle

On a vu dans la partie 1 que la hauteur de la plante, en fonction du nombre n de semaines, s'écrit 10^n, avec n nombre entier variant de 0 à 4.

On admet, dans cette partie 2, que l'expression trouvée s'applique à tous les nombres compris entre 0 et 4, entiers ou non. On définit ainsi, pour une variable t appartenant à l'intervalle $[0 ; 4]$, la fonction h telle que $h(t) = 10^t$.

Vous verrez page 65 une explication détaillée de la construction d'une telle fonction.

a. On veut calculer la hauteur de la plante au bout d'une semaine et demie.

- Quelle est alors la valeur de t ? Donner la réponse sous la forme d'un nombre décimal.

  $t = 1{,}5$.

- Remplacer t par sa valeur dans $h(t)$ et utiliser la touche « puissance » de la calculatrice ($\boxed{\wedge}$ ou $\boxed{x^y}$ ou …) pour effectuer le calcul. Arrondir à l'unité.

  $h(1{,}5) = 10^{1{,}5} \approx 32$ en arrondissant à l'unité.

- Répondre à la question par une phrase : la hauteur de la plante au bout d'une semaine et demie est 32 mm.

b. On veut calculer la hauteur de la plante au bout de 6 jours.

- Quelle est alors la valeur de t ? Donner la réponse sous la forme d'une fraction : $t = \frac{6}{7}$
- Remplacer t par sa valeur dans $h(t)$ et calculer. Arrondir à l'unité.

  $h(\frac{6}{7}) = 10^{6/7} \approx 7$ en arrondissant à l'unité.

- Répondre à la question par une phrase : la hauteur de la plante au bout de 6 jours est 7 mm.

La fonction, définie pour tout nombre t, par $t \mapsto 10^t$ est la **fonction exponentielle de base 10.**
Plus généralement, la **fonction exponentielle de base q** est la fonction, définie pour tout nombre x, par $x \mapsto q^x$ ($q > 0, q \neq 1$).

2 Vérifier les propriétés opératoires des fonctions exponentielles

Pour chaque question 1. 2. 3., une des deux propositions est correcte. Laquelle ?

Répondre en utilisant les valeurs approchées données par la calculatrice.

1. $10^{1,5} \times 10^{3,1} = ?$ ☒ $10^{1,5+3,1}$ ❒ $10^{1,5 \times 3,1}$

Plus généralement, si x et y sont deux nombres quelconques, on a : $q^x \times q^y = q^{x+y}$.

2. $\dfrac{10^{1,5}}{10^{3,1}} = ?$ ❒ $10^{1,5 \div 3,1}$ ☒ $10^{1,5-3,1}$

Ces formules sont les mêmes que celles des puissances d'exposant entier d'un nombre.

Plus généralement, si x et y sont deux nombres quelconques, on a : $\dfrac{q^x}{q^y} = q^{x-y}$.

3. $(10^{1,5})^{3,1} = ?$ ❒ $10^{(1,5^{3,1})}$ ☒ $10^{1,5 \times 3,1}$

Plus généralement, si x et y sont deux nombres quelconques, on a : $\left(q^x\right)^y = q^{x \times y}$.

Comment appliquer les propriétés opératoires des exponentielles ?

a. **Donner une autre écriture du calcul suivant : $2^{2,4} \times 2^{-0,6}$.**

- Utiliser la propriété $q^x \times q^y = q^{x+y}$.

$2^{2,4} \times 2^{-0,6} = 2^{2,4+(-0,6)} = 2^{1,8}$

b. **Donner une autre écriture du calcul suivant : $\dfrac{0,5^3}{0,5^{-1,2}}$.**

- Utiliser la propriété $\dfrac{q^x}{q^y} = q^{x-y}$.

$\dfrac{0,5^3}{0,5^{-1,2}} = 0,5^{3-(-1,2)} = 0,5^{4,2}$

RÉPONSES

Exercices

1 **a.** $10^{0,5} \approx 3,16$; $10^{-2,4} \approx 0,00$; $0,5^{3,8} \approx 0,07$; $0,5^{-0,5} \approx 1,41$.
b. $2^{-0,5} \approx 0,7$; $2^{1,8} \approx 3,48$; $0,2^{8,4} \approx 0,00$; $0,2^{-5,1} \approx 3\ 670,68$.

2 **a.** $9^{0,5} = 3$; $100^{0,5} = 10$; $25^{0,5} = 5$; $400^{0,5} = 20$.
b. Pour $x \geq 0$, $x^{0,5} = \sqrt{x}$.

3 **a.** $3^2 \times 3^{-4,9} = 3^{-2,9}$; $\dfrac{3^{-0,7}}{3^2} = 3^{-2,7}$; $\dfrac{3^{1,2}}{3} = 3^{0,2}$; $(3^{0,5})^2 = 3$.
b. $10^{x+4} = 10\ 000 \times 10^x$; $10^{x-2} = 0,01 \times 10^x$; $10^{-x} = \dfrac{1}{10^x}$; $10^{5x} = (10^x)^5$

14 Fonction logarithme décimal

(Livre élève pages 63 et 64)

Capacités
- Étudier les variations et représenter graphiquement la fonction logarithme décimal, sur un intervalle donné
- Résoudre des équations du type $q^x = a$ et $\log x = a$ ou des inéquations du type $q^x \geq b$ (ou $\leq$) et $\log x \geq b$ (ou $\leq$)

1 Découvrir la fonction logarithme décimal

Ouvrir le fichier « 05_log.ggb ».

1. Quand l'abscisse devient l'ordonnée et inversement

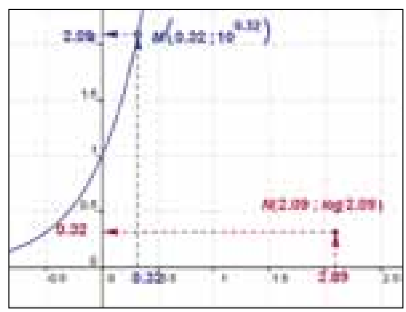
Soit f la fonction exponentielle de base 10 définie pour tout x par $f(x) = 10^x$.
La courbe tracée en bleu est la courbe représentative de la fonction f, notée C_f.
Le point M de coordonnées $(x_M\,;y_M)$ se déplace sur la courbe C_f à l'aide de la souris.

a. Lire graphiquement le sens de variation de f. La fonction f est croissante.

b. Déplacer le point M pour donner la valeur arrondie au dixième de $10^{0,2}$ et $10^{-0,2}$.

$10^{0,2} \approx 1,6$; $10^{-0,2} \approx 0,6$

On considère le point N de coordonnées $(y_M\,;x_M)$.
Par exemple, si $M(0,32\,;2,09)$, alors $N(2,09\,;0,32)$.



c. Faire apparaître le point N à l'écran en cochant la case Point N.
Vérifier que la trace de N est activée et déplacer le point M.
Décrire ce que l'on observe. Le point N se déplace sur une courbe symétrique de C_f par rapport à la 1re bissectrice.

La trace que l'on obtient est la courbe représentative d'une nouvelle fonction, la **fonction logarithme décimal, notée log.**

Par exemple : on a $10^{0,32} \approx 2,09$; on en conclut $\log 2,09 \approx 0,32$.

d. Écrire deux autres phrases sur ce modèle en utilisant les valeurs données par le logiciel.

$10^{0,2} \approx 1,58$; alors $\log 1,58 \approx 0,2$.

$10^{-0,3} \approx 0,5$; alors $\log 0,5 \approx -0,3$.

Plus généralement, pour $a > 0$, **si $\log a = b$, alors $a = 10^b$ et si $10^b = a$, alors $b = \log a$.**

2. Fonction logarithme décimal

a. Calculer log 18 et log 2 570 en utilisant la touche $\boxed{\text{log}}$ de la calculatrice. Arrondir au centième.

$\log 18 \approx 1,26$; $\log 2\,570 \approx 3,41$

b. Représenter graphiquement sur la calculatrice la fonction log pour x variant de 0 à 10.

c. Lire graphiquement le sens de variation de la fonction log.

La fonction log est croissante.

d. Construire le tableau de valeurs ci-contre sur la calculatrice en prenant $y_1 = 10^x$ et $y_2 = \log(10^x)$.

X	Y1	Y2
-2.2	6.3E-3	-2.2
-1.8	0.0158	-1.8
-1.4	0.0398	-1.4
-1	0.1	-1

Faire varier x de – 3 à 3 avec un pas de 0,4.

e. Quelle conjecture peut-on faire concernant la valeur de $\log(10^x)$?

$\log(10^x) = x$

2 Vérifier les propriétés opératoires de la fonction logarithme décimal

Pour chaque question 1. 2. 3., une des deux propositions est correcte. Laquelle ?
Répondre en utilisant les valeurs approchées données par la calculatrice.

1. $\log 6 + \log 2 = ?$ ❒ log 8 ☒ log 12

Plus généralement, pour $x > 0$ et $y > 0$, on a $\mathbf{\log x + \log y = \log (x \times y)}$.

2. $\log 6 - \log 2 = ?$ ☒ log 3 ❒ log 4

Plus généralement, pour $x > 0$ et $y > 0$, on a $\mathbf{\log x - \log y = \log \left(\frac{x}{y}\right)}$.

3. $\log (6^2) = ?$ ❒ $\log 6 \times \log 6$ ☒ $2 \log 6$

Plus généralement, pour $x > 0$, on a $\mathbf{\log (x^y) = y \log x}$.

Comment résoudre une équation du type $q^x = a$ et $\log x = a$?

a. Résoudre l'équation $5^x = 18$.

- Prendre le logarithme décimal de chaque membre : $\log(5^x) = \log 18$
- Appliquer la propriété $\log(a^b) = b \log a$ dans le premier membre : $x \log 5 = \log 18$.
- Isoler x en divisant par log 5 : $x = \dfrac{\log 18}{\log 5}$.

La solution de l'équation est 1,8 (valeur arrondie au dixième).

b. Résoudre l'équation $\log x = -2,5$.

- Appliquer la propriété du log : pour $a > 0$, si $\log a = b$, alors $a = 10^b$.

$x = 10^{-2,5}$

- Donner la valeur arrondie au millième de la solution : 0,003.

RÉPONSES

Exercices

1 $\log 2 \approx 0,30$; $\log 7,1 \approx 0,85$; $\log 2\,000 \approx 3,30$; $\log 0,5 \approx -0,30$.

2 a. $\log(10^8) = 8$; $\log 10 = 1$; $\log(10^{-1}) = -1$; $\log(10^{-3}) = -3$.
b. $\log 100 = 2$; $\log 0,01 = -2$; $\log 10\,000 = 4$; $\log 0,0001 = -4$.
c. $\log(10^n) = n \times \log 10 = n \times 1 = n$.

3 a. $4^x = 10$; $x = \dfrac{\log 10}{\log 4} = \dfrac{1}{\log 4}$.

$10^x = 17,5$; $x = \dfrac{\log 17,5}{\log 10}$; $x = \log 17,5$.

$0,6^x = 0,99$; $x = \dfrac{\log 0,99}{\log 0,6}$.

b. $\log x = 57$; $x = 10^{57}$. $\log x = -2,4$; $x = 10^{-2,4}$. $3 \log x = 12,6$; $\log x = 4,2$; $x = 10^{4,2}$.

4 a. $1,5^x > 20$; $x > \dfrac{\log 20}{\log 1,5}$.

$10^x \leq 110$; $x \leq \log 110$. $0,2^x \geq 0,1$; $x \leq \dfrac{\log 0,1}{\log 0,2}$.

b. $\log x < 2,3$; $x < 10^{2,3}$. $\log x \geq -0,3$; $x \geq 10^{-0,3}$. $\log x > 15$; $x > 10^{15}$.

(Livre élève pages 65 et 66)

15

J'utilise un logiciel (tableur)

Construire une fonction exponentielle à partir d'une suite géométrique

À l'instant $t = 0$, on injecte dans le sang d'un patient une dose de 1 centilitre d'un médicament à action rapide. On considère que le corps élimine chaque heure 50 % du médicament.
On étudie la quantité de médicament dans le sang pendant 6 heures et on se propose de la calculer au bout d'une heure et demie et au bout de 3 heures et quart.

1. Modélisation de la situation par une suite

On note u_0 la quantité de médicament au moment de l'injection, u_1 celle au bout d'une heure, u_2 celle au bout de 2 heures, etc.

On appelle (u_n) la suite $(u_0, u_1, u_2,..., u_6)$. C'est une suite géométrique.

a. Donner la valeur de u_0 et la raison de la suite : $u_0 = 1$. La raison est 0,5.

b. Calculer u_2 et u_5 : $u_2 = 0{,}25$; $u_5 = 0{,}03\,125$.

2. Représentation de la suite

a. Construction du premier tableau

Sur une feuille de calcul, construire le tableau qui permet de calculer les termes de la suite (u_n).

- Pour cela, entrer en B2 la formule =0,5^A2 et la recopier jusqu'en B8.

	A	B
1	n	0,5^n
2	0	1,000000
3	1	0,500000
4	2	0,250000
5	3	0,125000
6	4	0,062500
7	5	0,031250
8	6	0,015625

b. Construction du graphique

- Sélectionner les cellules de A1 à B8.
- Cliquer sur l'icône de l'*Assistant graphique* et choisir *Nuage de points*.

Voir fichier « 05_interpolation_corrige.xls » our « 05_interpolation_corrige.ods ».

3. Première dichotomie

Dichotomie signifie : division en deux parties égales. Nous allons prendre le milieu de chaque intervalle entre les abscisses entières afin d'obtenir $t = 0{,}5$; $t = 1{,}5$; ...

On s'intéresse à l'ordonnée des points d'abscisse 0,5 ; 1,5 ; ...

a. Calcul préliminaire

Notons y la quantité de médicament au bout d'une demi-heure, donc pour $t = 0{,}5$.
On veut que la suite u_0, y, u_1 soit géométrique.

Si trois nombres a, b, c forment une suite géométrique, alors $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$.

- Justifier l'égalité : $y^2 = u_0 \times u_1$.

Si la suite u_0, y, u_1 est géométrique, on a $\frac{y}{u_0} = \frac{u_1}{y}$. Donc $y \times y = u_0 \times u_1$.

- Calculer l'ordonnée y du point d'abscisse 0,5. $y = \sqrt{u_0 \times u_1} = \sqrt{1 \times 0{,}5} = \sqrt{0{,}5} \approx 0{,}70$.

b. Deuxième tableau

On généralise le calcul précédent à toutes les ordonnées des « points milieux ».

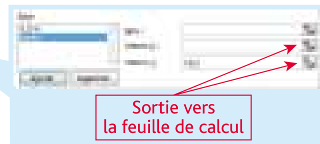
- Entrer en D3 la formule =(A2+A3)/2 et la recopier jusqu'en D8.

- Entrer en E3 la formule =RACINE(B2*B3) et la recopier jusqu'en E8.
- Répondre à la première question : quelle est la quantité de médicament dans le sang au bout d'une heure et demie ? environ 0,35 centilitre pour $t = 1{,}5$ h

c. Retour au graphique

Nous allons compléter le graphique précédent par les six nouveaux points trouvés.

- Cliquer sur le graphique avec le bouton droit de la souris. Choisir *Données source*, puis sous l'onglet *Série*, cliquer sur *Ajouter*.
- À la rubrique *Valeurs X*, cliquer sur l'icône de droite et sélectionner les cellules D3 à D8 sur la feuille de calcul. Cliquer à nouveau sur l'icône de droite.
- Procéder de même pour compléter la rubrique *Valeurs Y* avec les valeurs des cellules E3 à E8.



4. Deuxième dichotomie

Nous allons à nouveau « couper en deux » les intervalles entre les abscisses afin d'obtenir $t = 0{,}25$; $t = 0{,}75$; $t = 1{,}25$ ... et calculer les ordonnées correspondantes.

a. Troisième tableau

- Entrer en G3 la formule =(A2+D3)/2 et la recopier jusqu'en G8.
- Entrer en H3 la formule =RACINE(B2*E3) et la recopier jusqu'en H8.
- Entrer en G9 la formule =(A3+D3)/2 et la recopier jusqu'en G14.
- Entrer en H9 la formule =RACINE(B3*E3) et la recopier jusqu'en H14.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	n	0,5^n		x	y		x	y
2	0	1,000000						
3	1	0,500000		0,5	0,70711		0,25	0,84090
4	2	0,250000		1,5	0,35355		1,25	0,42045
5	3	0,125000		2,5	0,17678		2,25	0,21022

- Répondre à la deuxième question : quelle est la quantité de médicament dans le sang au bout de trois heures et quart ? $t = 3{,}25$ h
environ 0,074 centilitre.

Commencez par déterminer la valeur de *t*.

b. Retour au graphique

- Compléter le graphique précédent par les douze nouveaux points trouvés en procédant comme dans la partie 3.c.

5. Courbe exponentielle

En répétant le processus précédent plusieurs fois, on obtiendrait des points de plus en plus serrés, prenant l'aspect de la courbe représentative d'une fonction.

- Pour tracer cette courbe, cliquer avec le bouton droit sur un des premiers points placés.
- Choisir *Ajouter une courbe de tendance*..., puis sous l'onglet *Type*, sélectionner *Exponentielle*.

La courbe tracée représente la fonction $x \mapsto 0{,}5^x$ pour $x \geq 0$.

Exercices p. 69 et 70

1. QCM

a. 0,032.

b. $10^{2,4}$.

c. $10^{3,4}$.

d. $x < 10$.

2. Vrai – Faux

a. Vrai

b. Faux

c. Vrai

d. Faux

3. Textes à barrer

a. Sur $]0 ; +\infty[$, la fonction logarithme décimal est croissante ~~décroissante~~.

b. L'équation $10^x = -30$ ~~a pour solution – log 30~~ n'a pas de solution.

c. L'équation $\log x = -4$ a pour solution 10^{-4} ~~n'a pas de solution~~.

d. Si $0 < x < 1$, alors $\log x$ est ~~positif~~ négatif.

4. Phrases à compléter

a. La fonction f telle que $f(x) = 2,1^x$ est croissante.

b. Pour $x > 0$, la fonction f telle que $f(x) = \log x - 4$ est croissante.

c. La fonction f telle que $f(x) = 0,35^x$ est décroissante.

d. La fonction f telle que $f(x) = -2 \times 4,7^x$ est décroissante.

e. Pour $x > 0$, la fonction f telle que $f(x) = -0,2 \log x$ est décroissante.

f. La fonction f telle que $f(x) = 6 \times 0,4^x$ est décroissante.

› Calculer un logarithme décimal

5. $\log 1\,000 = 3$; $\log 0,01 = -2$; $\log(10^{-5}) = -5$; $\log(10^6) = 6$; $\log 17,2 \approx 1,24$; $\log 0,99 \approx -0,004$, soit 0 en arrondissant au centième.

6. $\log 3,2 \approx 0,51$; $\log\left(\dfrac{1}{5}\right) \approx -0,70$; $\log(6 \times 10^3) \approx 3,78$.

7. Un seul calcul impossible : $\log(-5^2)$.

8. Nombres positifs : $\log(10^3)$; $\log 8,2$; $\log(-5)^2$; $\log 1,05$.

Nombres négatifs : $\log\left(\dfrac{2}{3}\right)$; $\log(10^{-2})$; $\log 0,9$.

› Appliquer les propriétés opératoires du logarithme décimal

9. $\log(10^8) = 8$; $\log(10^{-1}) = -1$; $\log(10^{3,7}) = 3,7$; $\log(10^{-0,8}) = -0,8$.

10. $\log 16 = 4 \log 2$; $\log 20 = 1 + \log 2$;
$\log(2 \times 10^{-5}) = \log 2 - 5$;
$3 \log 8 - 7 \log 4 = -5 \log 2$;
$\log\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\log 2$; $\log(2 \times 10^7) + \log 2 = 2 \log 2 + 7$.

11. $\log 6 = \log 2 + \log 3 = 0,778$;
$\log 15 = \log 3 + \log 5 = 1,176$;
$\log 50 = \log 2 + 2\log 5 = 1,699$;
$\log 1,5 = \log 3 - \log 2 = 0,176$;
$\log 2,5 = \log 5 - \log 2 = 0,398$;
$\log 300 = 2\log 2 + \log 3 + 2\log 5 = 2,477$.

12. $\log(1,5x^4) = \log 1,5 + 4 \log x$;
$\log\left(\dfrac{x}{4}\right) = \log x - \log 4$;
$\log(10x) - 5 \log x = \log x + 1 - 5 \log x = 1 - 4 \log x$.

› Calculer une exponentielle

13. $10^5 = 100\,000$; $10^{-4} = 0,0001$; $10^{2,1} \approx 125,89$; $10^{-1,8} \approx 0,02$; $0,5^3 = 0,125$; $0,5^{-2} = 4$; $0,5^{1,6} \approx 0,33$; $0,5^{-0,7} \approx 1,62$.

14. $3^{2,5} \approx 15,59$; $2^{-4} = 0,0625$; $0,6^{3,5} \approx 0,17$; $7^{-0,8} \approx 0,21$; $1,5^{4,3} = 5,72$.

› Appliquer les propriétés opératoires d'une exponentielle

15. $10^{-3} \times 10^{5,1} = 10^{2,1}$; $\dfrac{10^4}{10^{3,1}} = 10^{0,9}$;

$10^{-9} \times 10 = 10^{-8}$; $(10^{-1,4})^2 = 10^{-2,8}$.

16. $10^{x+1} = 10 \times 10^x$; $10^{2-x} = \dfrac{100}{10^x}$;
$10^{2x+0,5} = 10^{0,5} \times (10^x)^2$

› Résoudre une équation ou une inéquation du type $q^x = a$ ou $q^x \leq a$

17. $10^n = 100\,000$; $n = 5$.
$10^n = 0{,}000\,001$; $n = -6$.
$0{,}5^n = 0{,}031\,25$; $n = 5$.

18. $3^x = 147$; $x = \dfrac{\log 147}{\log 3}$.

$5 \times 1{,}2^x = 15$; $1{,}2^x = 3$; $x = \dfrac{\log 3}{\log 1{,}2}$.

$10^x + 28 = 157$; $10^x = 129$; $x = \log 129$.

$0{,}5^x = 0{,}1$; $x = \dfrac{\log 0{,}1}{\log 0{,}5}$.

$10^{x+1} = 23$; $x + 1 = \log 13$; $x = \log 23 - 1$.

19. $10^x < 50$ équivaut à $x < \log 50$.

$6{,}1^x \geq 472{,}3$ équivaut à $x \geq \dfrac{\log 472{,}3}{\log 6{,}1}$.

$0{,}5^x \leq 0{,}48$ équivaut à $x \geq \dfrac{\log 0{,}48}{\log 0{,}5}$.

$10^{-6x} > 10^{-3}$ équivaut à $-6x > -3$, soit $x < 0{,}5$.

20. a. $C_5 = 20\,000 \times 1{,}035^5 \approx 23\,753{,}73$ €.

b. $20\,000 \times 1{,}035^n = 29\,200$; $1{,}035^n = 1{,}46$;
$n = \dfrac{\ln 1{,}46}{\ln 1{,}035} \approx 11$.
La valeur acquise est égale à 29 200 € au bout de 11 ans.

c. $1{,}035^n = 2$; $n = \dfrac{\ln 2}{\ln 1{,}035} \approx 20{,}16$.
Le capital a doublé à la fin de la 21e année.

21. a. $V_2 = 65\,049{,}60$ €.

b. $n > 2{,}63$. La valeur de la machine est inférieure à 60 000 € au bout de la troisième année.

c. $n \approx 5{,}4$. La machine a perdu la moitié de sa valeur au bout de la sixième année.

› Résoudre une équation ou une inéquation du type $\log x = a$ ou $\log x \geq a$

22. $\log x = 2{,}5$; $x = 10^{2,5}$.
$\log x = -4$; $x = 10^{-4} = 0{,}0001$.
$2 \log x = 10$; $\log x = 5$; $x = 10^5 = 100\,000$.
$4 \log x - 1 = -11$; $\log x = -2{,}5$; $x = 10^{-2,5}$.

23. $\log x > 2$; $x > 100$.
$\log x \leq 8$; $0 < x \leq 10^8$.
$2 \log x + 3 < 13$; $\log x < 5$; $0 < x < 10^5$.
$4 - \log x \geq 12$; $\log x \leq -8$; $0 < x \leq 10^{-8}$.

› Étudier une fonction comportant un logarithme décimal

24. a. La fonction logarithme décimal est croissante sur $]0\,;+\infty[$.

b. $f_1(x) = \log(4x) = \log 4 + \log x$. La fonction f_1 est croissante car on ajoute une constante à la fonction log.
$f_2(x) = -2 \log x$. La fonction f_2 est décroissante car on multiplie la fonction log par une constante négative.
$f_3(x) = 5 \log(x^3) = 15 \log x$. La fonction f_3 est croissante car on multiplie la fonction log par une constante positive.
$f_4(x) = -\log(x^2) + 5 = -2 \log x + 5$. La fonction f_4 est décroissante car on multiplie la fonction log par une constante négative. L'addition d'une constante ne change pas le sens de variation.

› Étudier une fonction comportant une exponentielle

25. a. La fonction exponentielle de base 10 est croissante.

b. $f_1(x) = 0{,}6 \times 10^x$. La fonction f_1 est croissante car on multiplie la fonction exponentielle de base 10 par une constante positive.
$f_2(x) = -10^x$. La fonction f_2 est décroissante car on multiplie la fonction exponentielle de base 10 par une constante négative, -1.
$f_3(x) = 10^x - 5$. La fonction f_3 est croissante car on ajoute une constante à la fonction exponentielle de base 10.
$f_4(x) = -4 \times 10^x + 2{,}7$. La fonction f_4 est décroissante car on multiplie la fonction exponentielle de base 10 par une constante négative. L'addition d'une constante ne change pas le sens de variation.

26. $f_1(x) = 3^x$. La fonction f_1 est croissante car 3 est supérieur à 1.
$f_2(x) = 0{,}8^x$. La fonction f_2 est décroissante car 0,8 est compris entre 0 et 1.
$f_3(x) = 2^x - 5$. La fonction $x \mapsto 2^x$ est croissante car 2 est supérieur à 1. On ajoute une constante à cette fonction. Donc la fonction f_3 est croissante.
$f_4(x) = 4 \times 5^x$. La fonction $x \mapsto 5^x$ est croissante car 5 est supérieur à 1. On multiplie cette fonction par une constante positive. Donc la fonction f_4 est croissante.
$f_5(x) = -5 \times 0{,}3^x$. La fonction $x \mapsto 0{,}3^x$ est décroissante car 0,3 est compris entre 0 et 1. On

multiplie cette fonction par une constante négative. Donc la fonction f_5 est croissante.

Problèmes p. 70 à 72

› Problème 1

Assurance-vie et taux de mortalité

1. a. $V(45) = 110\,545 \times 0{,}995^{45} \approx 88\,222$.

b. $V(63) = 110\,545 \times 0{,}995^{63} \approx 80\,610$.

2. Nombre de décès entre 45 et 63 ans : 7 612.

Taux de mortalité : $\dfrac{7\,612}{88\,222} \approx 0{,}086$, soit 9 %.

3. L'assureur va accepter le dossier de madame Prévo car ce taux est inférieur à 20 %.

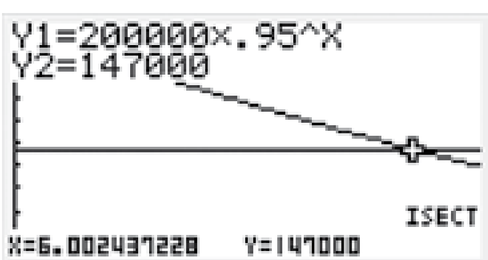
› Problème 2

Charges d'une entreprise

1. a. Montant des charges en 2012 :
$200\,000 \times 0{,}95 = 190\,000$ €.
Montant des charges en 2013 :
$190\,000 \times 0{,}95 = 180\,500$ €.
Montant des charges en 2014 :
$180\,500 \times 0{,}95 = 171\,475$ €.

b. La suite est géométrique car le quotient de deux termes consécutifs est constant.
Le premier terme est égal à 200 000 et la raison à 0,95.

2. a. et **b.**



On lit graphiquement $x \approx 6$. Le montant des charges sera de 147 000 € en 2017.

c. $200\,000 \times 0{,}95^x = 147\,000$; $0{,}95^x = 0{,}735$;

$x = \dfrac{\log 0{,}735}{\log 0{,}95} \approx 6$.

› Problème 3

Comparaison d'évolution de deux types de charges

1. a. et **b.** Voir fichier « 05_probleme3_corrige.xls » ou « 05_probleme3_corrige.ods ».

c. Les charges en personnel semblent augmenter le plus rapidement.

d. $\dfrac{15\,400 - 7\,800}{7\,800} \approx 0{,}97$. L'augmentation est de 97 %.

e. $\dfrac{5\,500 - 1\,400}{1\,400} \approx 2{,}93$. L'augmentation est de 293 %.

f. L'impression laissée par le graphique est donc fausse.

2. a. et **b.** Voir fichier « 05_probleme3_corrige.xls » ou « 05_probleme3_corrige.ods ».

c. Le rapport des charges en personnel d'une année sur l'autre est à peu près constant. Le pourcentage d'augmentation, c'est-à-dire la vitesse d'évolution, est presque le même.

d. Les points ne sont pas alignés. Le pourcentage d'augmentation augmente d'une année sur l'autre. La vitesse d'évolution augmente.

e. Le premier graphique est trompeur. En pourcentage, ce sont les charges de maintenance qui augmentent le plus.

› Problème 4

Le pH en chimie

1. $x = 3{,}5 \times 10^{-4}$.
$-\log x \approx 3{,}5$. Le pH de la solution est 3,5.

2. pH = 9.
$-\log x = 9$; $\log x = -9$; $x = 10^{-9}$.
La concentration en ions H_3O^+ est 10^{-9} mole par litre.
La solution est basique.

› Problème 5

Coût d'entretien d'un équipement

Voir fichier « 05_probleme5_corrige.xls » ou « 05_probleme5_corrige.ods »

1. b. La forme du nuage de points ne justifie pas un ajustement par une droite.

c. La forme du nuage de points s'allonge.

2. c. On obtient $y = 0{,}14x + 2{,}39$.

d. $\ln C_7 = 0{,}14 \times 7 + 2{,}39 = 3{,}37$.

e. $C_7 \approx 29$ (en centaines d'euros). L'estimation demandée est 2 900 €.

› Problème 6
Évolution de la population d'une ville

1. $50\,000 \times 1{,}05 = 52\,500$. Il y a 52 500 habitants au 1er janvier 2012.
$52\,500 \times 1{,}05 = 55\,125$. Il y a 55 125 habitants au 1er janvier 2013.

2. a. La fonction $x \mapsto 1{,}05^x$ est croissante car 1,05 est supérieur à 1.
Cette fonction est multipliée par une constante positive. Donc la fonction f est croissante.

b. $f(1) = 52\,500$; $f(2) = 55\,125$.

c. $x = 1{,}5$.
$f(1{,}5) = 50\,000 \times 1{,}05^{1{,}5} \approx 53\,796$.
La population au 1er juillet 2012 est estimée à 53 796 habitants.

Je me teste

(Livre élève pages 73 et 74)

EXERCICE 1 pH d'une solution

Le pH d'une solution mesure son acidité. Par définition, pH = – log x où x désigne la concentration en ions H_3O^+ exprimée en mole par litre.

1 Calcul du pH

a. Calculer, avec la calculatrice, le pH d'une solution dont la concentration en ion H_3O^+ est 10^{-5} mol/L.

$x = 10^{-5}$. Donc pH = – log (10^{-5}) = 5.

b. Quel est le sens de variation de la fonction logarithme décimal ?

La fonction log est croissante sur $]0 ; +\infty[$.

Lorsque la concentration en ions H_3O^+ augmente, le pH augmente-t-il ou diminue-t-il ?

Le pH diminue. Voir fichier « 05_pH_corrige.xls » ou « 05_pH_corrige.ods ».

c. Utiliser un tableur pour traiter la suite de l'exercice.

- Porter dans la colonne A les concentrations. Elles varient de 10^{-1} à 10^{-14} et la concentration est divisée par 10 d'une ligne à l'autre.

Entrer en A2 la valeur 10^{-1}. Entrer en A3 la formule =A2/10 et la recopier vers le bas jusqu'à la cellule A15.

	A	B
1	concentration	pH
2	0,1	1
3	0,01	2
4	0,001	3
5	0,0001	4

- Les pH sont dans la colonne B.

Entrer en B2 la formule =–LOG10(A2) et la recopier vers le bas jusqu'à la cellule B15.

d. Comment varie le pH lorsque la concentration en ions H_3O^+ est divisée par 10 ?

Le pH augmente de 1.

Justifier par un calcul. $-\log\left(\frac{x}{10}\right) = -(\log x - \log 10) = -\log x + 1.$

e. Comment varie la concentration en ions H_3O^+ lorsque le pH augmente de 3 unités ?

Elle est divisée par 1 000.

Justifier par un calcul. $\text{pH} + 3 = -\log x + \log(10^3) = -(\log x - \log(10^3)) = -\log\left(\frac{x}{1000}\right)$

2 Représentation graphique

a. Représenter ce tableau par un nuage de points à l'aide de l'Assistant graphique du tableur.

Vous semble-t-il utilisable pour une lecture graphique ?

Non, en particulier la partie gauche du graphique.

b. Faire une copie du graphique précédent et choisir l'échelle logarithmique en abscisse : effectuer un clic droit sur cet axe. Dans *Format de l'axe*, ouvrir l'onglet *Échelle* et cocher *échelle logarithmique*.

Expliquer pourquoi on obtient des points alignés.

La différence d'ordonnées entre 2 points consécutifs est – 1. La différence d'abscisses est $\log(10^{-13}) - \log(10^{-14}) = \log(10^{-12}) - \log(10^{-13}) = \ldots = 1$. Il y a proportionnalité entre Δx et Δy.

A **Appelez le professeur pour présenter votre argumentation.**

VERS LE CCF

EXERCICE 2 Des souris malades

On administre quotidiennement, pendant 6 semaines un médicament à une population de 1 000 souris malades. Au bout d'une semaine, on fait un test et on remarque que 50 % des souris sont guéries. On recommence le test chaque semaine.

On admet que, chaque semaine, 50 % des souris encore malades à la fin de la semaine précédente sont guéries.

1 Calculer le nombre de souris encore malades à la fin de la 4e semaine. Détailler le raisonnement.

$1\,000 \times 0,5^4 = 62,5$

À la fin de la 4e semaine, il reste 63 souris malades.

2 Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 6]$ par : $f(x) = 1\,000 \times 0,5^x$.

a. Donner le sens de variation de la fonction $x \mapsto 0,5^x$. Justifier.

Cette fonction est décroissante car c'est une fonction de la forme $x \mapsto a^x$ avec $0 < a < 1$.

b. En déduire le sens de variation de f. Justifier.

f est le produit de la fonction $x \mapsto 0,5^x$ par la constante positive 1 000. La fonction f est donc aussi décroissante.

c. Résoudre l'équation $f(x) = 400$. Arrondir la solution à l'unité.

$1\,000 \times 0,5^x = 400$; $0,5^x = 0,4$; $x = \dfrac{\ln 0,4}{\ln 0,5} \approx 1,32$.

3 La fonction f modélise le nombre de souris encore malades après une durée x exprimée en semaines (x n'est pas forcément un nombre entier de semaines).

a. Déterminer le nombre de souris guéries dès le premier jour.

$1\,000 \times 0,5^{1/7} \approx 906$ souris encore malades. Il y a donc 94 souris guéries.

b. Donner le nombre de jours nécessaires pour que les $\dfrac{3}{5}$ des souris soient guéries.

$\dfrac{2}{5}$ des souris sont encore malades, soit 400. Le nombre de jours cherché est donc la solution de l'équation $f(x) = 400$:

1,32 semaine ≈ 9 jours.

A

Appelez le professeur pour présenter oralement les réponses 3. a. et 3. b.

16 Primitives d'une fonction

Capacités
- Savoir que si F est une primitive d'une fonction f sur un intervalle, $F + k$ (où k est une constante) est aussi une primitive de f
- Déterminer les primitives d'une somme de fonctions, du produit d'une fonction par un réel

(Livre élève pages 75 et 76)

1 Première approche d'une primitive

Un dépliant publicitaire

Un constructeur automobile annonce sur un dépliant publicitaire que la vitesse d'une voiture passe de 0 à 100 km/h en 14 secondes.
On suppose que le mouvement de ce véhicule est uniformément accéléré, c'est-à-dire que sa vitesse instantanée est proportionnelle à t telle que $v(t) = at$.

1. Convertir 100 km/h en m/s. Arrondir le résultat au dixième. $100 \div 3{,}6 \approx 27{,}8$ soit 27,8 m/s.

2. Déterminer le réel a. $v(14) = a \times 14 = 27{,}8$ d'où $a = 27{,}8 \div 14$ $a = 1{,}986$.

La fonction vitesse v est la fonction dérivée de la fonction distance parcourue d.

Si $d(t)$ désigne la distance parcourue à l'instant t, alors $d'(t) = v(t)$.

3. Parmi les fonctions suivantes : $d_1(t) = 3{,}98t + k$; $d_2(t) = 1{,}99t^2 + k$; $d_3(t) = 0{,}99t^2 + k$, laquelle a pour dérivée la fonction v ? Il s'agit de $d_3(t) = 0{,}99t^2 + k$.

À l'instant initial, le véhicule est à l'arrêt. Donc, $d(0) = 0$.

4. Déterminer la fonction d : $d(0) = 0{,}99 \times 0^2 + k = 0$ d'où $k = 0$. Soit $d(t) = 0{,}99t^2$.

5. Calculer $d(14)$: $d(14) = 0{,}99 \times 14^2 = 194{,}04$.

2 Détermination d'une primitive d'une fonction

1. Des fonctions et une dérivée commune

Soient les fonctions F_1, F_2 et F_3 définies pour tout x par :
$F_1(x) = x^2 + 3x$; $F_2(x) = x^2 + 3x + 3$; $F_3(x) = x^2 + 3x - 5$.

a. Tracer, à l'aide de GeoGebra ou de la calculatrice, dans un même repère, les représentations graphiques des fonctions F_1, F_2 et F_3.

b. Que constate-t-on graphiquement ? Les courbes sont parallèles.

c. Déterminer F_1', F_2' et F_3' : $F_1'(x) = 2x + 3$, $F_2'(x) = 2x + 3$, $F_3'(x) = 2x + 3$.

d. Que constate-t-on ? $F_1'(x) = F_2'(x) = F_3'(x)$.

On dit que les fonctions F_1, F_2 et F_3 sont des primitives de la fonction f définie pour tout x par $f(x) = 2x + 3$ car $F_1'(x) = F_2'(x) = F_3'(x) = f(x)$.

e. Donner deux autres fonctions ayant la même fonction dérivée f.

$F_4(x) = x^2 + 3x - \sqrt{2}$; $F_5(x) = x^2 + 3x + 0{,}4$.

2. Primitives d'une fonction

Soit la fonction G définie pour tout x par $G(x) = F_1(x) + k$ où k est une constante.

a. Déterminer G' : $G'(x) =$ $F_1'(x)$.

b. Que peut-on dire de la fonction $G = F_1 + k$? La fonction $G = F_1 + k$ est aussi une primitive de la fonction f.

Si la fonction F_1 est une primitive de la fonction f, alors la fonction $F_1 + k$ est aussi une primitive de la fonction f.

3. Primitives d'une somme de fonctions et du produit d'une fonction par une constante

Soient la fonction F, une primitive de la fonction f, définie pour tout x par $F(x) = x^3$ et la fonction G, une primitive de la fonction g, définie pour tout x par $G(x) = x^2$.

a. Déterminer les fonctions f et g : $f(x) =$ $3x^2$ et $g(x) =$ $2x$.

b. Vérifier que la fonction $F + G$ est une primitive de la fonction $f + g$. $F(x) + G(x) = x^3 + x^2$

$F'(x) + G'(x) = 3x^2 + 2x = f(x) + g(x)$

c. Vérifier que les fonctions $2F$ et $3G$ sont des primitives des fonctions $2f$ et $3g$. $2F(x) = 2x^3$

$(2F(x))' = 2 \times 3x^2 = 6x^2 = 2f$; $3G(x) = 3x^2$, $(3G(x))' = 3 \times 2x = 6x = 3g$.

d. Vérifier que les fonctions $2F + 3G$ sont des primitives des fonctions $2f + 3g$. $2F(x) + 3G(x) = 2x^3 + 3x^2$

$(2F(x) + 3G(x))' = 6x^2 + 6x = 2f + 3g$.

On a vérifié les deux propriétés suivantes :
– si F est une primitive de f et si G est une primitive de g, alors $F + G$ est une primitive de $f + g$;
– si F est une primitive de f et si k est une constante, alors kF est une primitive de kf.

Comment déterminer les primitives d'une fonction ?

Déterminer les primitives de la fonction f définie pour tout x par $f(x) = 2x + 3$.

- Identifier la forme de la fonction : $f(x)$ est de la forme $1(x) + v(x)$.
  avec $u(x) =$ $2x$ et $v(x) =$ 3 .
- Lire dans le tableau des primitives de la page 151 la fonction correspondant à x :
  x a pour primitive $\frac{1}{2}x^2 + k$. Donc $2x$ a pour primitive $2 \times \frac{1}{2}x^2 + k$ $= x^2 + k$.
- Lire dans le tableau des primitives de la page 151 la fonction correspondant à la constante 3 :
  La fonction constante 3 a pour primitive $3x + k$.
- Donner les fonctions primitives cherchées : f étant la somme des deux termes précédents, les primitives de f sont données par $F(x) =$ $x^2 + 3x + k$.

On peut s'occuper des constantes à la fin des calculs car la somme de deux constantes est encore une constante.
On ajoute donc une constante k à la fin des calculs.

RÉPONSES
Exercices

1 **a.** $F(x) = 2{,}5x^2 + k$; **b.** $G(x) = -0{,}5x^2 + 7x + k$.

2 **a.** $F(x) = -\frac{1}{5}x^2 - 5x + k$;
b. $G(x) = x - 6{,}5x^2 + k$.

3 **a.** $F(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2{,}5x^2 + 8x + k$;
b. $G(x) = -\frac{x^3}{6} + \frac{1}{10}x^2 - 4x + k$.

(Livre élève pages 77 et 78)

17 J'utilise un logiciel (tableur)

Calculer la valeur moyenne d'une fonction

Le gestionnaire d'une jeune société d'achat-vente de jeux informatiques estime que le nombre de ventes mensuelles de jeux est donné par la relation : $p(n) = n^3 - 36n^2 + 384n$ où n est le nombre de mois écoulés depuis la fondation de la société.

Partie A : Nombre moyen mensuel de jeux vendus sur 20 mois

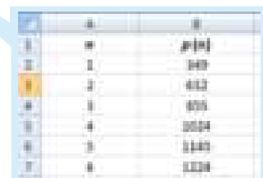
1. Détermination à l'aide d'un tableur

a. ▪ Avec un tableur, réaliser la feuille de calcul dont voici un extrait.

▪ Faire varier n de 1 à 20 avec un pas de 1.

▪ Quelle formule faut-il entrer dans la cellule B2 ? =A2^3-36*A2*A2+384*A2

▪ Recopier cette formule vers le bas jusqu'à la valeur 20 de n.



b. Calculer le nombre total N de ventes durant cette période : $N =$ 21 420.

c. En déduire le nombre moyen de jeux vendus par mois : $\frac{21\,420}{20} = 1071$.

2. Détermination à l'aide des primitives

Pensez à utiliser la fonction *somme* en mettant " : " pour indiquer que l'on prend les valeurs de toutes les cellules.

Soit f une fonction définie pour tout x par $f(x) = x^3 - 36x^2 + 384x$.

La valeur moyenne de la fonction f sur $[a\,;b]$ $(a < b)$ est le nombre réel µ tel que :

$$\mu = \frac{1}{b-a}[F(b) - F(a)] \text{ où } F \text{ est une primitive de } f.$$

a. Déterminer une primitive F de f : $C(n) = \frac{x^4}{4} - 12x^3 + 192x^2$

b. Calculer $F(0)$ et $F(20)$. $F(0) =$ 0 et $F(20) =$ 20 800 .

c. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0\,;20]$: $\mu = \frac{20\,800}{20} = 1040$.

d. Comparer cette valeur avec le nombre moyen de ventes par mois calculé à la question 1.c.

Elles sont légèrement différentes mais proche tout de même.

Partie B : Évolution d'une année sur l'autre

Le gestionnaire veut connaître l'évolution des ventes de la seconde année par rapport à la première. Mais il ne connaît pas encore le nombre des ventes des quatre derniers mois. Pour cela, il doit estimer le nombre moyen de ventes mensuelles de la seconde année d'exercice.

a. À l'aide du tableur, calculer le nombre total N de ventes durant la première année. $N =$ 12 636 .

b. En déduire le nombre moyen de jeux vendus par mois la première année : $12\,636 \div 12 = 1\,053$

c. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[12\,;24]$. $\frac{F(24) - F(12)}{12} = \frac{27\,648 - 12\,096}{12} = 1296$.

d. Donner le nombre moyen de ventes de jeux par mois la seconde année : 1 296 jeux vendus par mois.

e. En déduire comment évolue le nombre moyen mensuel de ventes de la seconde année par rapport à la première si la relation reste valable les quatre derniers mois.

Il y a une augmentation du nombre moyen mensuel de ventes.

J'utilise un logiciel (tableur)

Comparer le coût total calculé au coût total estimé

Coût marginal

Le coût marginal correspond au coût de production d'un objet supplémentaire. Une entreprise fabrique 1 000 objets. Elle estime que le coût marginal, en euros, du $q^{\text{ième}}$ objet supplémentaire est donné par la relation $C_m(q) = 3q + 40$. La fabrication du 1er objet supplémentaire (le 1 001e) coûte 43 €.

1. Coût total de fabrication de dix objets supplémentaires

a. ▪ Avec un tableur, réaliser la feuille de calcul dont voici un extrait.

▪ Faire varier q de 1 à 10 avec un pas de 1.

▪ Quelle formule faut-il entrer dans la cellule B2 ? =3*A2+40

▪ Recopier cette formule vers le bas jusqu'à la valeur 10 de q.

b. Le coût total de fabrication de q objets supplémentaires est la somme des coûts marginaux de chaque objet supplémentaire.

▪ Quelle formule faut-il entrer dans la cellule C2 ? =SOMME($B$2:B2)

▪ Recopier cette formule vers le bas jusqu'à la valeur 10 de q.

▪ Donner le coût total de fabrication pour 10 objets supplémentaires : 565 €

2. Coût total de fabrication de *q* objets

Le coût total de fabrication $F(q)$ de q objets supplémentaires est égal à :

$F(q) = C_m(1) + C_m(2) + \ldots + C_m(q)$.

Montrer que $F(q) = \frac{3}{2}q^2 + 41{,}5q$.

La somme des q premiers entiers naturels non nuls est $S_q = \frac{q}{2}(1 + q)$.

$F(q) = 3 \times 1 + 40 + 3 \times 2 + 40 + \ldots + 3 \times q + 40$

$F(q) = 3(1 + 2 + \ldots + q) + 40 \times q = 3 \times \frac{q}{2}(1 + q) + 40q$

$F(q) = \frac{3}{2}q + \frac{3}{2}q^2 + 40q = \frac{3}{2}q^2 + 41{,}5q$

3. Erreur commise par le coût total estimé

Dans la pratique, on assimile le coût marginal à la dérivée de la fonction coût total estimé notée C et définie pour q strictement positif. On a $C_m(q) = C'(q)$.

a. ▪ Déterminer la primitive C de la fonction C_m définie pour tout $q > 0$ avec $C(0) = 0$. $C(q) = \frac{3}{2}q^2 + 40q$

▪ Entrer dans la cellule D2 la formule correspondant à $C(q)$ et la recopier vers le bas.

b. On cherche l'erreur commise, en pourcentage, si on prend $C(q)$ comme estimation du coût total $F(q)$ calculé dans la question 2.

▪ En E2, entrer la formule =(C2–D2)*100/C2 et la recopier vers le bas jusqu'à la valeur 10 de q.

c. Décrire l'évolution de l'erreur commise : Plus q augmente, plus l'erreur commise diminue.

d. À quoi est due l'erreur commise ? À la différence entre $F(q)$ et $C(q)$ de $1{,}5q$.

Exercices & Problèmes

Exercices p. 81 et 82

1. QCM

a. $F_1(x) = 3x + 12$

b. $F(x) = -3x + k$

c. $F(x) = 2x^3 + k$

d. $F(x) = \dfrac{x^5}{5} + k$

2. Associer

Primitives	Fonctions
$F(x) = 6x^2 + 6x$	$f(x) = 12x^2 + 6$
$F(x) = 6x^3 + 3x^2$	$f(x) = 24x^2 + 6x$
$F(x) = \dfrac{3}{2}x^2 + 6x + 5$	$f(x) = 12x + 6$
$F(x) = 4x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 + 7$	$f(x) = 12x^2 + 3x$
$F(x) = 4x^3 + 6x$	$f(x) = 3x + 6$

3. Choix dans une liste

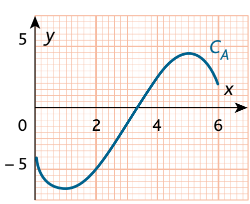
a. Si $f(x) = 2x$, alors $F(x) = x^2 + k$ est une primitive F de f.

b. Si $f(x) = 2x^4 + 9x^2$, alors $F(x) = 0{,}4x^5 + 3x^3 + k$ est une primitive F de f.

c. Si $f(x) = \dfrac{4}{x}$, pour $x > 0$, alors $F(x) = 4\ln x + k$ est une primitive F de f.

4. QCM

a.



b. – 4.

c. $F(x) = -\dfrac{x^3}{3} + 3x^2 - 5x - 4$.

› Primitives d'une fonction

5. a. $F(x) = 1{,}5x^2 - 5x + k$.
b. $G(x) = -0{,}5x^2 + 2x + k$.

6. a. $F(x) = -\dfrac{1}{7}x^2 - 15x + k$.
b. $G(x) = x - 5{,}5x^2 + k$.

7. a. $F(x) = \dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{7}{2}x^2 + 6x + k$.
b. $G(x) = -\dfrac{1}{6}x^3 + 2x^2 - \dfrac{1}{5}x + k$.

8. a. $F(x) = -\dfrac{0{,}01}{3}x^3 + 3x + k$.
b. $G(x) = -\dfrac{\sqrt{11}}{3}x^3 - 2x + k$.

9. a. $F(x) = -\dfrac{3}{x} + k \; (x \neq 0)$.
b. $G(x) = \dfrac{2}{x} + k \; (x \neq 0)$.

10. a. $F(x) = 3\ln x + k \; (x > 0)$.
b. $G(x) = -2\ln x + k \; (x > 0)$.

11. a. $F(x) = x^2 - \ln x + k$.
b. $G(x) = \dfrac{1}{12}x^3 + 4x + k$.

12. a. $F(x) = -2x^2 + \ln x + k \; (x > 0)$.
b. $G(x) = -3x^3 - 2\ln x + k \; (x > 0)$.

13. a. $F(x) = 4\ln x + 0{,}5x^4 + k \; (x > 0)$.
b. $G(x) = -\dfrac{1}{x} - 3\ln x + k \; (x > 0)$.

14. a. $F(x) = -0{,}5x^6 + 0{,}75x^4 - 2x^2 + k$.
b. $G(x) = x^5 - \dfrac{7}{3}x^3 - 2x + k$.

15. a. $F(x) = x^4 - 2x^2 + 4x + k$.
b. $G(x) = -2x^5 + 4x^3 + 2x + k$.

› Primitive d'une fonction prenant une valeur donnée en un point donné

16. $F(x) = \dfrac{x^3}{3} - 1{,}5x^2 + x + \dfrac{1}{6}$.

17. $F(x) = \dfrac{1}{9}x^3 - 2{,}5x^2 + 7x + \dfrac{46}{9}$.

18. $F(x) = x + 3\ln x + 2 \; (x > 0)$.

19. $F(x) = -2\ln x + \dfrac{x^2}{2} + x + 2 + 2\ln 7 \; (x > 0)$.

20. $F(x) = -4\ln x - \dfrac{2}{9}x^3 + \dfrac{2}{9}$.

21. $F(x) = -\frac{2}{3}x^6 + \frac{5}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 63$.

22. $F(x) = -x^5 + 4x^3 + 7x$.

23. $F(x) = 2 \ln x$ $(x > 0)$.

24. **a.** $F(2) - F(0) = 6$; **b.** $F(3) - F(-1) = 20$.

25. **a.** $F(2) - F(-1) = -3$; **b.** $F(3) - F(-3) = 18$.

26. **a.** $F(1) - F(0) = \frac{1}{18}$; **b.** $F(0) - F(-1) = 0{,}5$.

27. **a.** $F(2) - F(1) = 2$; **b.** $F(3) - F(1) = 4 \ln 3$.

28. **a.** $F(3) - F(1) = \frac{4}{3}$; **b.** $F(1) - F(0{,}5) = 1{,}5 + 8 \ln 0{,}5$.

29. $F(2) - F(-2) = 8$; $F(0{,}85) - F(-0{,}85) \approx 3{,}9696$.

Problèmes p. 83 et 84

› Problème 1

Consommation de gaz naturel

1. $Q(t) = 0{,}005t^2 + 4{,}5t$.

2. Les réserves seront épuisées lorsque $Q(t) = 100$.
Soit à résoudre l'équation $0{,}005t^2 + 4{,}5t - 100 = 0$.
Cette équation n'a qu'une solution positive 21,7.
Il faudra 21 ans pour épuiser les réserves de gaz naturel.

› Problème 2

Coût total de production

1. $F(q) = -0{,}006q^2 + 16q + k$.

2. $F(q) = -0{,}006q^2 + 16q + 4{,}006$.

3. $F(60) = 942{,}406$.
Le coût total de production de 60 combinaisons est de 942,41 €.

› Problème 3

Coût total de production

1. $F(q) = -\frac{0{,}2}{3}q^3 + 3q^2 + 10q + 40\,000$.

2. $F(11) - F(8) = 40\,384{,}27 - 40\,237{,}87 = 146{,}40$.
Le coût de production de trois centaines d'objets supplémentaires est de 146,40 milliers d'euros.

› Problème 4

1. $C_k(q) = 0{,}3q^2 + k$.

2. La constante k représente le coût fixe de la production. Elle ne doit pas dépendre de q.

3. Lorsque $C_k(100) = 6\,000$, la constante k prend la valeur 3 000.
On en déduit que le coût fixe de cette production vaut 3 000 €.

› Problème 5

Coût total de production

1. $F(q) = -0{,}008q^2 + 24q + 4{,}008$.

2. $F(100) = 2\,324{,}008$.
Le coût total de production de 100 pièces est de 2 324 €.

› Problème 6
Évolution du stock

1. a. $S(t) = 0{,}0025t^4 - 0{,}17t^3 - t^2 + 680t$.

b. $S_{m1} = \frac{1}{15} \times 9\,527{,}8125 = 635{,}1875$. Soit une valeur moyenne $S_{m1} = 635$.

2. $S_{m2} = \frac{1}{15} \times 6\,843{,}48 = 456{,}232$. Soit une valeur moyenne $S_{m2} = 456$.

3. $S_m = \frac{1}{30} \times 16\,935 = 564{,}5$. Soit une valeur moyenne $S_m = 565$.

4. La valeur S_m est la moyenne entre les valeurs S_{m1} et S_{m2}.
La légère différence provient du fait que l'on ne tient pas compte de l'intervalle [15 ; 16].

5. a. $200 \times 30 \times S_m = 200 \times 30 \times 565 = 3\,390\,000$.
Le coût total de gestion s'élève à 3,39 milliers d'euros.

b. Voir le fichier « ch11_pb11 ».
Formule à entrer en B2 : « =0,01*A2^3-0,51*A2^2-2*A2+680 ».
Formule à entrer en C2 : « =B2*200 ».

c. Le coût total de gestion s'élève à 3,362 milliers d'euros.

d. Les valeurs sont très proches. La différence provient d'un mode de calcul avec des valeurs discrètes et avec un mode de calcul avec une fonction continue.

› Problème 7
Formation du capital

1. $C(t) = 1\,000t + k$.

2. $C(0) = k$ et $C(1) = 1\,000 + k$.

3. $C(1) - C(0) = 1\,000$.
La formation du capital généré est de 1 000 €.

4. La 2^e^ année : $C(2) - C(1) = 1\,000$.
La 3^e^ année : $C(3) - C(2) = 1\,000$

5. On constate que la formation du capital est constante lorsque l'investissement net est constant.

› Problème 8
Formation du capital

1. $C(t) = 1{,}5t^2 + k$.

2. $C(1) = 1{,}5 + k$ et $C(2) = 6 + k$.

3. $C(2) - C(1) = 4{,}5$.
La formation du capital généré la 2^e^ année est de 4,5 milliers d'euros.

4. La 3^e^ année : $C(3) - C(2) = 7{,}5$.
La 4^e^ année : $C(4) - C(3) = 10{,}5$.
La formation du capital généré la 3^e^ année est de 7,5 milliers d'euros et la 4^e^ année de 10,5 milliers d'euros.

18 Fonction logarithme népérien

Capacité
- Étudier les variations et représenter graphiquement la fonction logarithme népérien sur un intervalle donné

(Livre élève pages 85 et 86)

1 Découvrir la fonction logarithme népérien

Une petite nouvelle dans la famille des fonctions

1. Recherche d'une fonction dont la dérivée est une fonction connue

Voici quatre fonctions f_1, f_2, f_3, f_4 définies pour tout x :

$$f_1(x) = \frac{1}{2}x^2 \,;\, f_2(x) = \frac{1}{3}x^3 \,;\, f_3(x) = \frac{1}{4}x^4 - 5 \,;\, f_4(x) = x^2 - x.$$

Revoyez les formules du chapitre 2 si nécessaire.

a. Déterminer les fonctions dérivées f'_1, f'_2, f'_3, f'_4.

$f'_1(x) = x \,;\, f'_2(x) = x^2 \,;\, f'_3(x) = x^3 \,;\, f'_4(x) = 2x - 1.$

b. L'une d'elles est-elle égale à la fonction carré ? f'_2 est égale à la fonction carré.

c. L'une d'elles est-elle égale à la fonction cube ? f'_3 est égale à la fonction cube.

d. L'une d'elles est-elle égale à la fonction inverse ? Aucune des dérivées obtenues n'est égale à la fonction inverse.

La fonction logarithme népérien est la fonction, définie pour $x > 0$, dont la dérivée est la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$ et qui s'annule en 1.

$\ln(x)$ s'écrit usuellement $\ln x$.

La fonction logarithme népérien se note ln. On a : $\ln : x \mapsto \ln x$.

e. Compléter à l'aide du texte précédent : $\ln 1 = 0$; $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

2. Calcul de quelques valeurs

Utiliser la touche $\boxed{\ln}$ de la calculatrice pour effectuer les calculs suivants. Arrondir au centième.

$\ln 0{,}2 \approx -1{,}61$; $\ln 0{,}8 \approx -0{,}22$; $\ln 1{,}2 \approx 0{,}18$; $\ln 2 \approx 0{,}69$

3. Sens de variation de la fonction ln

a. Donner le signe de $\frac{1}{x}$ pour $x > 0$. $\frac{1}{x}$ est positif.

b. En déduire le sens de variation de la fonction ln sur $]0\,;+\infty[$. La fonction ln est croissante.

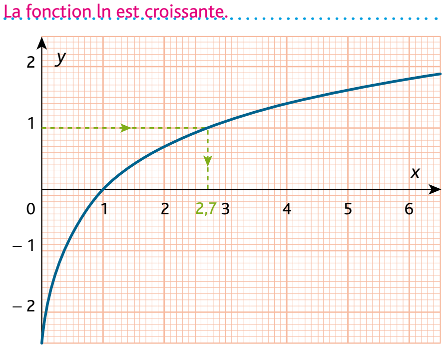
c. Voici la courbe représentative de la fonction ln.

La réponse faite au b. est-elle conforme à l'allure de cette courbe ? Cette courbe est celle d'une fonction croissante.

d. Placer sur cette courbe le point d'ordonnée 1.

Donner une valeur approchée au dixième de l'abscisse de ce point. 2,7

La valeur exacte de cette abscisse est un nombre réel non décimal noté e.



2 Vérifier les propriétés opératoires de la fonction logarithme népérien

1. Calculer ln (3 × 5), ln 3 et ln 5. $\ln(3 \times 5) \approx 2{,}708$; $\ln 3 \approx 1{,}099$; $\ln 5 \approx 1{,}609$.

Quelle relation semble lier les trois nombres ? Les valeurs approchées de $\ln(3 \times 5)$ et $\ln 3 + \ln 5$ sont égales.

Plus généralement, pour $a > 0$ et $b > 0$, on peut montrer que $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$.

2. Calculer $\ln\left(\frac{7}{4}\right)$, ln 7 et ln 4. $\ln\left(\frac{7}{4}\right) \approx 0{,}56$; $\ln 7 \approx 1{,}946$; $\ln 4 \approx 1{,}386$.

Quelle relation semble lier les trois nombres ? Les valeurs approchées de $\ln\left(\frac{7}{4}\right)$ et $\ln 7 - \ln 4$ sont égales.

Plus généralement, pour $a > 0$ et $b > 0$, on peut montrer que $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$.

3. Calculer $\ln(2^3)$ et $3 \times \ln 2$. $\ln(2^3) \approx 2{,}079$; $3 \times \ln 2 \approx 2{,}079$.

Comparer les deux résultats. Les valeurs approchées de $\ln(2^3)$ et $3 \times \ln 2$ sont égales.

Plus généralement, pour $a > 0$ et n entier positif ou négatif, on peut montrer que $\ln(a^n) = n \times \ln a$.

Comment rechercher l'exposant d'une puissance à l'aide d'un logarithme népérien ?

a. Rechercher l'entier n tel que $3^n = 6\,561$.

- Prendre le logarithme des deux membres de l'équation : $\ln(3^n) = \ln 6\,561$.
- Appliquer la formule $\ln(a^n) = n \times \ln a$ au premier membre : $n \times \ln 3 = \ln 6\,561$.
- Isoler l'inconnue dans le premier membre : $n = \dfrac{\ln 6\,561}{\ln 3}$
- Calculer n en tapant le calcul tel qu'il est écrit, sur la calculatrice : $n = 8$

b. Trouver le plus petit entier n tel que $0{,}85^n < 0{,}75$.

- Prendre le logarithme des deux membres de l'inéquation : $\ln(0{,}85^n) < \ln 0{,}75$.
- Appliquer la formule $\ln(a^n) = n \times \ln a$ au premier membre :
  $n \times \ln 0{,}85 < \ln 0{,}75$.
- Diviser les deux membres de l'inéquation par ln 0,85.
  $n > \dfrac{\ln 0{,}75}{\ln 0{,}85}$
- Effectuer le membre de droite avec la calculatrice : $n > 1{,}77$
- Donner la réponse : Le plus petit entier n cherché est 2.

Attention au sens lorsque vous divisez ! Le logarithme d'un nombre compris entre 0 et 1 est négatif.

RÉPONSES
Exercices

1 $\ln 8 \approx 2{,}08$; $\ln 0{,}7 \approx -0{,}36$; $\ln\left(\frac{2}{3}\right) \approx -0{,}41$; $\ln 2\,000 \approx 7{,}60$.

2 $n = \dfrac{\ln 1024}{\ln 2} = 10$.

3 $n < \dfrac{\ln 3}{\ln 1{,}2}$; $n < 6{,}025$. Le plus grand entier n cherché est 6.

4 $\ln(e^2) = 2 \times \ln e = 2$; $\ln(e^3) = 3 \times \ln e = 3$.

5 $\ln 49 + 3 \ln 7 = 2 \ln 7 + 3 \ln 7 = 5 \ln 7$.

19

(Livre élève pages 87 et 88)

J'utilise un logiciel (GeoGebra)

Étudier le signe de la fonction ln
Dériver une fonction comportant un logarithme népérien

1. Signe de la fonction ln

Ouvrir le fichier « 07_ln.ggb ».
Le point *M* est le point d'abscisse *x* qui se déplace sur la courbe représentative de la fonction ln. Son ordonnée est donc égale à ln *x*.

a. Déplacer le point *M* avec la souris ou avec le pavé fléché.

Lire dans la partie gauche de l'écran l'ordonnée de *M*.

Noter quelques-unes de ces ordonnées. 0,916 ; – 0,693 ; – 4,605 ; 0 ; 1,609.

b. L'ordonnée de *M* garde-t-elle le même signe quelle que soit la valeur de *x* ? Non.

Pour quelles valeurs de *x* est-elle positive ? L'ordonnée de *M* est positive pour $x > 1$.

Pour quelles valeurs de *x* est-elle négative ? Elle est négative pour $0 < x < 1$.

c. Déduire des réponses précédentes le tableau de signe de la fonction ln pour *x* variant de 0 (exclu) à 6.

x	0		1		6
Signe de ln x		–	0	+	

Ne pas confondre tableau de signe et tableau de variation.

2. Dérivée d'une fonction comportant un logarithme népérien

Reprendre le fichier précédent. Le point *M* n'est pas utilisé dans cette partie et peut être rendu invisible en cliquant sur la puce devant *M* dans la fenêtre de gauche.

a. Dérivée de la fonction logarithme népérien

- Quelle est la fonction dérivée de la fonction ln ? La dérivée de la fonction ln est la fonction inverse pour $x > 0$.
- Vérifier la réponse donnée avec le logiciel : taper sur la ligne de saisie « $f'(x)$ » et valider.

On obtient ainsi une fonction g telle que $g = f'$.

Quelle est l'expression de $g(x)$ qui apparaît dans la partie gauche de l'écran ? $g(x) = \frac{1}{x}$.

b. Dérivée de fonctions comportant la fonction ln

- Calculer les dérivées des fonctions suivantes, définies pour $x > 0$, par $f_1(x) = \ln(3x)$; $f_2(x) = \ln(x^3)$; $f_3(x) = x + \ln x$; $f_4(x) = 4 \ln x$.

$f_1(x) = \ln 3 + \ln x$; $f'_1(x) = \frac{1}{x}$; $f_2(x) = 3 \ln x$; $f'_2(x) = \frac{3}{x}$; $f'_3(x) = 1 + \frac{1}{x}$; $f'_4(x) = \frac{4}{x}$.

- Vérifier les réponses données avec le logiciel : modifier la fonction f en tapant sur la ligne de saisie $f(x) = \ln(3x)$ pour la première fonction. La fonction dérivée g est modifiée automatiquement.
Faire de même pour les autres fonctions.

J'utilise un logiciel (tableur)

Utiliser un logarithme en statistique

Prix de vente d'un produit

On étudie le nombre d'acheteurs potentiels d'un produit en fonction de son prix de vente.

Prix de vente : x_i	200	250	300	400	500
Nombre d'acheteurs potentiels : y_i	522	380	305	240	204

L'objectif de l'activité est de donner une estimation du nombre d'acheteurs potentiels pour un prix de vente de 600 €.

Ouvrir le fichier « **07_prixvente.xls** » ou « **07_prixvente.ods** ».

1. Premier nuage de points

Dans cette partie, travailler sur la feuille 1 du classeur.

a. Représenter par un nuage de points le tableau de cette feuille.

b. Un ajustement de ce nuage par une droite semble-t-il adapté ? non. Sa forme est celle d'une courbe exponentielle.

c. ▪ Choisir une échelle logarithmique pour l'axe des ordonnées : effectuer un clic droit sur cet axe. Dans *Format de l'axe*, ouvrir l'onglet *Échelle* et cocher *Échelle logarithmique*.

▪ Que devient le nuage de points ? Il prend une forme allongée.

2. Second nuage de points

Dans cette partie, travailler sur la feuille 2 du classeur.

On va construire un nouveau nuage de points en portant en ordonnée, non plus y_i, mais ln (y_i). On pose $z_i = \ln(y_i)$.

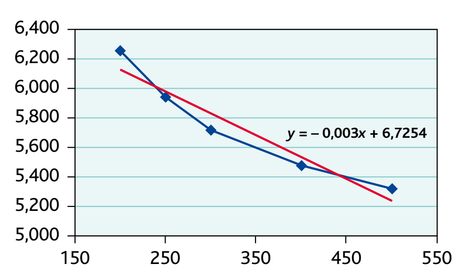
a. Pour compléter le tableau donnant les valeurs de z_i, entrer dans la cellule B3 la formule =ln(B2). La recopier jusqu'à la cellule F3.

b. Sélectionner les lignes 1 et 3 et les représenter par un nuage de points.

c. Un ajustement de ce nuage par une droite semble adapté.

▪ Effectuer un clic droit sur l'un des points du nuage et sélectionner *Ajouter une courbe de tendance*.

▪ Choisir le type *Linéaire*, puis dans Options *Afficher l'équation sur le graphique*.



d. En remplaçant x par 600 dans cette équation, calculer z pour $x = 600$. $z = -0{,}003 \times 600 + 6{,}7254 = 4{,}9254$.

e. Donner le nombre potentiel d'acheteurs pour un prix de vente de 600 € en utilisant l'extrait de la table de valeurs de la fonction ln donné sur la feuille 2. On trouve 140 acheteurs potentiels environ.

Exercices & Problèmes

Exercices p. 91 et 92

1. QCM

a. – 1,61

b. ln e = 1

c. 7

2. Vrai – Faux

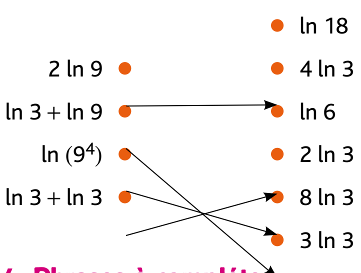
a. Vrai

b. Faux

c. Faux

d. Vrai

3. Associer



4. Phrases à compléter

a. ln 1,7 est strictement positif.

b. ln 1 est égal à 0.

c. $\ln\left(\frac{2}{7}\right)$ est strictement négatif.

d. $\ln(5^{-3} \times 5^3)$ est égal à 0.

e. ln 0,99 est strictement négatif.

f. ln e est strictement positif.

› Calculer un logarithme

5. $\ln 18 \approx 2{,}89$; $\ln 2{,}5 \approx 0{,}92$; $\ln 0{,}2 \approx -1{,}61$;
$\ln 0{,}58 \approx -0{,}55$; $\ln\left(\frac{5}{3}\right) \approx 0{,}51$; $\ln\left(\frac{4}{7}\right) \approx -0{,}56$.

6. $\ln 7 \approx 1{,}95$; $\ln 3{,}2 \approx 1{,}16$; $\ln\left(\frac{1}{5}\right) \approx -1{,}61$;
$\ln 0{,}187 \approx -1{,}68$; $\ln\left(\frac{17}{3}\right) \approx 1{,}73$; $\ln(6 \times 10^3) \approx 8{,}70$.

7. Les calculs impossibles sont : $\ln(-4)$ et $\log(-3^2)$.

› Appliquer les propriétés opératoires

8. $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln 1 - \ln b = 0 - \ln b = -\ln b$.

9. $\ln(3a) = \ln 3 + \ln a$; $\ln\left(\frac{5}{a}\right) = \ln 5 - \ln a$;
$\ln(a^7) = 7\ln a$; $\ln(6a^2) = \ln 6 + 2\ln a$;
$5\ln(a^2) + 3\ln(2a) = 10\ln a + 3\ln 2 + 3\ln a$
$= 13\ln a + 3\ln 2$.

10. $\ln 27 = 3\ln 3$; $4\ln 3 - \ln 9 + 2\ln\left(\frac{1}{3}\right)$
$= 4\ln 3 - 2\ln 3 - 2\ln 3 = 0$; $\ln\left(\frac{e}{3}\right) = 1 - \ln 3$;
$5\ln 9 + \ln\left(e^3\right) = 10\ln 3 + 3$.

› Rechercher l'exposant d'une puissance à l'aide d'un logarithme

11. $4^n = 16\,384$; $n = \frac{\ln 16\,384}{\ln 4} = 7$.
$7^n = 5\,764\,801$; $n = \frac{\ln 5\,764\,801}{\ln 7} = 8$.
$10 \times 1{,}5^n = 75{,}937\,5$; $n = \frac{\ln 7{,}593\,75}{\ln 1{,}5} = 5$.

12. $5^n < 100$; $n < 2{,}86$ et n entier ; $n = 2$.
$2{,}8^n \geq 42{,}3$; $n \geq 3{,}03$ et n entier ; $n = 4$.
$0{,}4^n \leq 0{,}17$; $n \geq 1{,}93$ et n entier ; $n = 2$.
$10^{-3n} > 10^{-5}$; $n < \frac{5}{3}$ et n entier ; $n = 1$.

13. a. $40\,000 \times 0{,}94 = 37\,600$.
La quantité de rejets prévus en 2012 est 37 600 tonnes.

b. $r_{n+1} = 0{,}94 r_n$.
La suite (r_n) est une suite géométrique.
$r_n = 40\,000 \times 0{,}94^n$.

c. $40\,000 \times 0{,}94^n < 30\,000$; $0{,}94^n < 0{,}75$;
$n > \frac{\ln 0{,}75}{\ln 0{,}94}$; $n > 4{,}649$
La quantité de rejets sera inférieure à 30 000 tonnes à partir de 2016.

14. Soit t le temps exprimé en heures.

a. $10\,000 \times 0{,}95^t \leq 2\,000$; $0{,}95^t \leq 0{,}2$; $t \geq \frac{\ln 0{,}2}{\ln 0{,}95}$;
$t \geq 31{,}38$, soit 31 h 23 min

b. $10\,000 \times 1{,}05^t = 20\,000$; $1{,}05^t = 2$; $t = \dfrac{\ln 2}{\ln 1{,}05}$;
$t \approx 14{,}21$, soit 14 h 13 min

› Dériver une fonction comportant un logarithme népérien

15. a. $f'(x) = -\dfrac{1}{x}$; $f'(x) < 0$ sur $[0{,}1 ; 4]$.
Donc f est décroissante sur cet intervalle.

b. $f'(x) = \dfrac{1}{x}$; $f'(x) > 0$ sur $[0{,}1 ; 4]$.
Donc f est croissante sur cet intervalle.

c. $f'(x) = \dfrac{2}{x}$; $f'(x) > 0$ sur $[0{,}1 ; 4]$.
Donc f est croissante sur cet intervalle.

d. $f'(x) = \dfrac{4}{x}$; $f'(x) > 0$ sur $[0{,}1 ; 4]$.
Donc f est croissante sur cet intervalle.

Problèmes p. 92 à 94

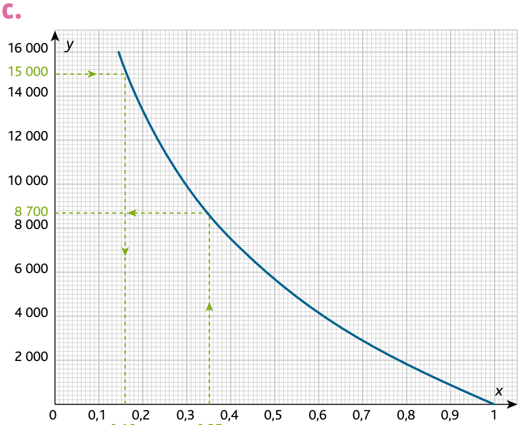
› Problème 1

Datation au carbone 14

1. a. $f'(x) = -\dfrac{8\,310}{x}$ sur l'intervalle $[0{,}2 ; 1]$.

b. $f'(x) < 0$. Donc f est décroissante sur $[0{,}2 ; 1]$.

c.



2. a. $f(0{,}35) = 8\,700$. L'âge du fossile est 8 700 ans.

b. Voir graphique.

c. Voir graphique. La fraction de carbone 14 restant est environ 16 %.

› Problème 2

Découverte du système solaire

Voir fichier « 07_planete_corrige.xls » ou « 07_planete_corrige.ods ».

1. b. La forme du nuage ne justifie pas un ajustement par une droite.

2. a.

i	$d_i - d_0$	$\ln(d_i - d_0)$
0	0	
1	50	3,912
2	92	4,522
3	170	5,136
5	721	6,581
6	1 370	4 110
7	2 814	7,942

c. $\ln(d_4 - d_0) = 0{,}676 \times 4 + 3{,}181 \approx 5{,}885$;
$\ln(d_8 - d_0) = 0{,}676 \times 8 + 3{,}181 \approx 8{,}589$.

3. a. $d_4 = 24{,}071 \times 1{,}966^4 + 58 \approx 417$ millions de kilomètres.

b. $d_8 = 24{,}071 \times 1{,}966^8 + 58 \approx 5\,430$ millions de kilomètres.

4. a. $\dfrac{417 - 414}{414} \approx 0{,}007$, soit 0,7 % d'écart.

b. $\dfrac{5\,430 - 4\,500}{4\,500} \approx 0{,}206$, soit 21 % d'écart.

› Problème 3

1. Augmentation du montant des ventes entre 2000 et 2001 :
$\dfrac{332 - 179}{179} \approx 0{,}854$, soit 85 %.
Augmentation du montant des ventes entre 2001 et 2002 :
$\dfrac{584 - 332}{332} \approx 0{,}759$, soit 76 %.
L'augmentation entre 2000 et 2002 n'est pas la somme de ces deux augmentations car la valeur de référence n'est pas la même.
Augmentation du montant des ventes entre 2000 et 2002 : $\dfrac{584 - 179}{179} \approx 2{,}262$, soit 226 %.

2. a. et **b.** Voir fichier « 07_probleme3.xls » ou « 07_probleme3.ods ».

c. $z = 0{,}65x + 4{,}5$.

d. En 2007, $x_i = 8$.
$z_8 = 0{,}65 \times 8 + 4{,}5 = 9{,}7$.

e. Le montant des ventes est compris entre 16 200 et 16 400 milliers d'euros.

3. a. $5\ 027\ 000 \times 0{,}96 = 4\ 825\ 920$.
Le montant des ventes pour 2008 est 4 826 milliers d'euros.

b. $4\ 826 \times 0{,}96^4 = 4\ 098{,}9$.
La prévision pour 2012 est de 4 099 milliers d'euros.

› Problème 4
Coût d'un transport

Partie A

1. $0{,}1 \times 480 + 630 = 678$.
Pour 480 km, C_F est égal à 678 €.

2. $200 \times \ln 480 - 600 \approx 634{,}76$.
Pour 480 km, C_R est égal à 634,76 €.

3. Le moyen de transport le plus économique est le transport routier.

Partie B

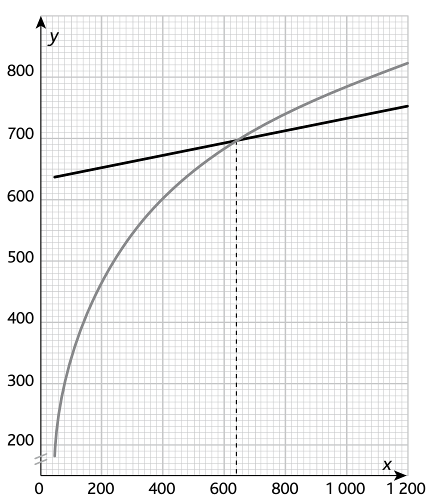
1. a. La fonction f est une fonction affine.

b. Sa courbe représentative est une droite.

2. a.

x	50	100	300	400	600	800	1 000	1 200
$g(x)$	180	320	540	600	680	740	780	820

b.



3. La solution graphique de l'équation $f(x) = g(x)$ est 640.

Partie C

1. Les deux coûts de transport sont égaux pour 640 km.

2. Le transport ferroviaire est le plus avantageux pour les distances comprises entre 640 km et 1 200 km.

3. Le transport routier est le plus avantageux pour les distances comprises entre 50 km et 640 km.

› Problème 5
L'offre et la demande

1. a. $f'(x) = -\dfrac{1}{x}$.

b. La dérivée est négative. **c.**

c.

x	500	12 000
$f(x)$	6,66 ↘	3,48

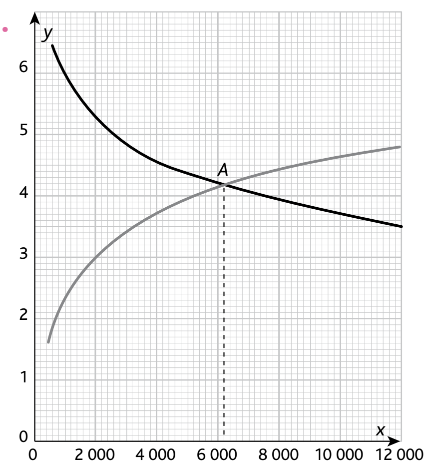
2. a. $g'(x) = \dfrac{1}{x}$.

b. La dérivée est positive. **c.**

c.

x	500	12 000
$f(x)$	1,61 ↗	4,79

3. a.



b. L'abscisse du point A est 6 200 environ.

4. Il y a équilibre pour 6 200 stylos au prix de 4,30 €.

5. a. $8 \ln 5 - \ln x = \ln (0{,}01x)$;
$8 \ln 5 = \ln x + \ln (0{,}01x)$.
On utilise les propriétés opératoires des logarithmes.
$\ln (5^8) = \ln (x \times 0{,}01x)$. D'où $\ln (0{,}01x^2) = \ln (5^8)$.

b. $0{,}01x^2 = 5^8$; $x^2 = 5^8 \times 10^2$. La solution positive de cette équation est $5^4 \times 10 = 6\ 250$.

c. Les deux réponses sont proches.

20 Fonction exponentielle de base e

(Livre élève pages 95 et 96)

Capacités
- Interpréter e^b comme la solution de l'équation $\ln x = b$
- Étudier les variations et représenter graphiquement la fonction $x \mapsto e^x$ sur un intervalle donné

1 Découvrir la fonction exponentielle de base e

1. Résolution graphique de l'équation $\ln x = 2$ pour $x > 0$

a. Tracer, sur la calculatrice, la courbe représentative de la fonction logarithme népérien.

Fenêtre graphique : x Min : 0, x Max : 20, pas : 2, y Min : – 4, y Max : 4, pas : 1.

b. Dans la même fenêtre, tracer la droite d'équation $y = 2$.

c. Donner, à l'aide des fonctionnalités graphiques de la calculatrice, une valeur approchée au centième de la solution de l'équation $\ln x = 2$: $x \approx 7{,}39$

Il a été vu au chapitre 5 qu'on appelle e le nombre tel que **ln e = 1** (e ≈ 2,718).

On note e^2 la solution de l'équation $\ln x = 2$. On a donc $\ln(e^2) = 2$.

2. Résolution graphique de l'équation $\ln x = b$ pour $x > 0$ (b constante donnée)

a. Compléter, par la même méthode graphique qu'au 1b. et c., le tableau suivant :

b	– 3	– 2	– 1	0	0,5	1	2	3
Valeur approchée au centième de e^b	0,05	0,14	0,36	1	1,65	2,72	7,39	20,09

Sur la calculatrice, remplacez $y = 2$ par $y = -3$, puis par $y = -2$, etc.

On admet que, pour $x > 0$, l'équation $\ln x = b$ admet une solution et une seule, notée e^b.

La fonction qui, à tout nombre b, associe e^b est appelée fonction exponentielle de base e.

En notant comme d'habitude la variable par x, on note cette fonction : $x \mapsto e^x$.

b. Donner une valeur approchée de e^3 en appuyant successivement sur les touches : $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{ln}}$ $\boxed{3}$ $\boxed{\text{EXE}}$.

$e^3 \approx 20{,}09$

Comparer avec la valeur trouvée graphiquement en *a*. C'est la même valeur approchée.

Répondre aux mêmes questions pour les autres valeurs du nombre b données dans le tableau.

La méthode graphique et la calculatrice donnent les mêmes valeurs pour e^b.

3. Sens de variation de la fonction exponentielle de base e

Voici la courbe représentative de la fonction f définie, quel que soit x, par $f(x) = e^x$.

a. D'après ce graphique, quel est le sens de variation de la fonction f ?

La fonction f est croissante.

b. D'après ce graphique, de quel signe est e^x ? e^x est positif quel que soit x.

c. On admet que la fonction dérivée de f est la fonction f' telle que, pour tout x, $f'(x) = e^x$.

On a donc $f = f'$. Vérifier, à l'aide du signe de la dérivée, le sens de variation de la fonction f.

e^x étant positif, la fonction dérivée f' est positive. Donc la fonction f est croissante.

➔2 Vérifier les propriétés opératoires de la fonction exponentielle

Pour chaque question 1., 2. et 3., une des deux propositions est correcte. Laquelle ?
Répondre en utilisant les valeurs approchées données par la calculatrice.

1. $e^5 \times e^3 = ?$ ☒ e^{5+3} ❒ $e^{5 \times 3}$

Plus généralement, si x et y sont deux nombres quelconques, on a $e^x \times e^y = e^{x+y}$.

2. $\dfrac{e^5}{e^3} = ?$ ❒ $e^{5 \div 3}$ ☒ e^{5-3}

Plus généralement, si x et y sont deux nombres quelconques, on a $\dfrac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$.

3. $(e^5)^3 = ?$ ❒ $e^{(5^3)}$ ☒ $e^{5 \times 3}$

Plus généralement, si x est un nombre quelconque et n est un entier positif ou négatif, on a $\left(e^x\right)^n = e^{x \times n}$.

Comment dériver une fonction obtenue simplement à partir de $x \mapsto e^x$?

a. Déterminer la dérivée de la fonction f définie pour tout x par $f(x) = 5e^x$.

- Identifier la forme de la fonction.

  $f(x)$ est de la forme : $a \times u(x)$, donc $f'(x)$ est de la forme : $a \times u'(x)$.

- Appliquer la formule précédente avec $a = 5$ et $u(x) = e^x$.

  $f'(x) = 5e^x$.

b. Déterminer la dérivée de la fonction g définie pour tout x par $g(x) = 5 + e^x$.

- Identifier la forme de la fonction.

  $g(x)$ est de la forme : $u(x) + v(x)$, donc $g'(x)$ est de la forme : $u'(x) + v'(x)$.

- Appliquer la formule précédente avec $u(x) = 5$ et $v(x) = e^x$.

  $g'(x) = 0 + e^x = e^x$.

RÉPONSES

Exercices

1 $e^4 \approx 54,60$; $e^{0,5} \approx 1,65$; $e^{-2} \approx 0,14$; $e^{-0,5} \approx 0,61$.

2 **a.** $e^2 \times e^{-3} = e^{-1}$; $(e^{-1})^{-4} = e^4$; $\dfrac{e^2}{e^{-2}} = e^4$.

b. $e^{x+1} = e \times e^x$; $e^{10x} = \left(e^x\right)^{10}$; $e^{x-2} = e^{-2} \times e^x$.

3 **a.** $f'(x) = 0,7\, e^x$.
b. $f'(x) = e^x$.
c. $f'(x) = -6\, e^x$.
d. $f'(x) = e^3 \times e^x$.

21 Autres fonctions exponentielles

(Livre élève pages 97 et 98)

Capacités
- Étudier les variations des fonctions $x \mapsto e^{ax}$ (a réel non nul)
- Résoudre des équations du type $e^{ax} = b$ et des inéquations du type $e^{ax} \geq b$ (ou $\leq$)
- Résoudre des équations du type $\ln(ax) = b$ (avec $a > 0$) et des inéquations du type $\ln(ax) \geq b$ (ou $\leq$) avec $a > 0$

1 Croissance exponentielle

Des bactéries gloutonnes

Une population de 12 000 bactéries est placée en milieu renouvelé (accès non limité à la nourriture, à l'oxygène) au temps $t = 0$. Le nombre de bactéries, en fonction du temps t exprimé en minutes, est donné par : $f(t) = 12\,000 \times e^{0,01t}$ pour t variant de 0 à 60.

1. Calculer le nombre de bactéries après 20 minutes.

Pour cela, taper sur la calculatrice : $\boxed{1}\,\boxed{2}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{\times}\,\boxed{\text{2nde}}\,\boxed{\ln}\,\boxed{(}\,\boxed{,}\,\boxed{0}\,\boxed{1}\,\boxed{\times}\,\boxed{2}\,\boxed{0}\,\boxed{)}\,\boxed{\text{EXE}}$.
Arrondir le résultat à l'unité.

14 657 bactéries.

2. Calculer, de même, le nombre de bactéries après 40 minutes, puis après 60 minutes.

Après 40 minutes : 17 902 ; après 60 minutes : 21 865 bactéries.

Le nombre de bactéries augmente-t-il ou diminue-t-il ? Il augmente.

3. Calculer le pourcentage d'évolution du nombre de bactéries entre $t = 0$ et $t = 20$ ①, puis entre $t = 20$ et $t = 40$ ②, et finalement entre $t = 40$ et $t = 60$ ③. ① $\dfrac{14\,657 - 12\,000}{12\,000} \approx 0,221$, soit 22,1 % ; ② $\dfrac{17\,902 - 14\,657}{14\,657} \approx 0,221$, soit 22,1 % ;
③ $\dfrac{21865 - 17\,902}{17\,902} \approx 0,221$, soit 22,1 %.

Que remarque-t-on ? Le pourcentage d'augmentation est le même.

4. Tracer la courbe représentative de la fonction f sur la calculatrice.

5. Donner, à partir de ce graphique, le sens de variation de la fonction f.

La fonction f est croissante.

2 Décroissance exponentielle

Antiseptique contre bactéries

Une population de 12 000 bactéries est soumise à un agent antiseptique au temps $t = 0$. Le nombre de bactéries, en fonction du temps t exprimé en minutes, est donné par : $g(t) = 12\,000 \times e^{-0,3t}$ pour t variant de 0 à 15.

1. Calculer le nombre de bactéries après 5 minutes. 2 678 bactéries.

Même question après 10 minutes, puis après 15 minutes. 597 bactéries, 133 bactéries.

Le nombre de bactéries augmente-t-il ou diminue-t-il ? Il diminue.

2. Calculer le pourcentage d'évolution du nombre de bactéries entre $t = 0$ et $t = 5$, puis entre $t = 5$ et $t = 10$, et finalement entre $t = 10$ et $t = 15$.

① $\frac{12\,000 - 2\,678}{12\,000} \approx 0{,}777$, soit 77,7 % ; ② $\frac{2\,678 - 597}{2\,678} \approx 0{,}777$, soit 77,7 % ;

③ $\frac{597 - 133}{597} \approx 0{,}777$, soit 77,7 %.

Que remarque-t-on ? Le pourcentage de diminution est le même.

3. Tracer la courbe représentative de la fonction g sur la calculatrice.

4. Donner, à partir de ce graphique, le sens de variation de la fonction g.

La fonction g est décroissante.

Les fonctions f et g sont des fonctions exponentielles du type $x \mapsto e^{ax}$ où a est une constante non nulle. La fonction dérivée est de la forme $x \mapsto a \times e^{ax}$.

Comment résoudre des équations du type $e^{ax} = b$ et des inéquations du type $e^{ax} \geq b$?

a. Résoudre l'équation $e^{4x} = 3$.

- Utiliser la propriété suivante : si $e^a = b$ ($b > 0$), alors $a = \ln b$.

$4x = \ln 3$

- Terminer la résolution de l'équation.

$x = \frac{\ln 3}{4}$ La solution de l'équation est : $\frac{\ln 3}{4}$

b. Résoudre l'inéquation $e^{-0,5x} \geq 6$.

- Utiliser la propriété suivante : si $e^a \geq b$, alors $a \geq \ln b$.

$-0{,}5x \geq \ln 6$

- Terminer la résolution de l'inéquation. Changer le sens de l'inéquation lorsqu'on divise ses deux membres par un nombre négatif.

$x \leq -2 \ln 6$ Les solutions de l'inéquation sont les nombres inférieurs ou égal à $-2 \ln 6$.

Diviser par $-0{,}5$, c'est multiplier par -2.

Comment résoudre des équations du type $\ln(ax) = b$ (avec $a > 0$) ?

Résoudre l'équation $\ln(4x) = 3$.

- Utiliser la propriété suivante du cours : si $\ln b = a$, alors $b = e^a$ ($b > 0$).

$4x = e^3$.

- Terminer la résolution de l'équation.

$x = \frac{e^3}{4}$. La solution de l'équation est : $\frac{e^3}{4}$.

RÉPONSES
Exercices

1 a. $e^{8x} = 6$; $8x = \ln 6$; $x = \frac{\ln 6}{8}$.

$e^{-2x} = 7$; $-2x = \ln 7$; $x = \frac{\ln 7}{-2}$.

b. $e^{2x} \geq 10$; $2x \geq \ln 10$; $x \geq 0{,}5 \ln 10$.

$e^{-x} \leq 0{,}5$; $-x \leq \ln 0{,}5$; $x \geq \ln 0{,}5$.

c. $\ln(5x) = 9$; $5x = e^9$; $x = 0{,}2e^9$.

$\ln(0{,}4x) \leq 2$; $0{,}4x \leq e^2$; $x \leq 2{,}5e^2$.

2 a. $f'(x) = 4\,e^{4x}$.

b. $f'(x) = -2\,e^{-2x}$.

c. $f'(x) = 10\,e^{2x}$.

(Livre élève pages 99 et 100)

22

J'utilise un logiciel (GeoGebra)

Donner l'équation réduite d'une tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle de base e

Ouvrir le fichier « 08_tangentes.ggb ».
On a tracé la courbe représentative C de la fonction $f : x \mapsto e^x$ dans un repère orthogonal.
Le point M est un point quelconque de C.

Le logiciel a été paramétré pour donner des résultats arrondis au centième.

1. Tangente à la courbe C au point d'abscisse 3

a. Tracé de la tangente avec le logiciel

- Choisir 3 pour l'abscisse de M.
- Sélectionner l'outil *Tangente*.
- Cliquer successivement sur la courbe C et sur le point M.
- On obtient la droite tangente en M à la courbe C. La renommer et l'appeler T.

b. Équation de la tangente

L'équation réduite de la tangente à la courbe représentative d'une fonction f au point A d'abscisse x_A est donnée par la relation : $y = f'(x_A)\,(x - x_A) + f(x_A)$.

- Donner la fonction dérivée f' de la fonction $f : x \mapsto e^x$: $f'(x) = e^x$.
- Calculer $f'(3)$: $f'(3) = e^3$.
- Donner l'équation de T sous la forme $y = ax + b$. Arrondir a et b au centième.
  $y = e^3(x - 3) + e^3$; $y = e^3x - 2e^3$; $y = 20{,}09x - 40{,}17$.
- Comparer avec l'équation donnée par le logiciel dans la fenêtre de gauche :
  C'est la même équation que celle donnée par le logiciel.

2. Autres tangentes

Déplacer le point M après avoir cliqué sur l'outil *Sélection*.

a. Tangente au point d'abscisse 1

- Choisir 1 pour l'abscisse de M.
- Quelle particularité présente la tangente T ? Elle passe par l'origine.
- Justifier en utilisant l'équation de T fournie par le logiciel : $y = 2{,}72x$ est l'équation d'une droite qui passe par l'origine.

b. Tangente au point d'abscisse 2

- Choisir 2 pour l'abscisse de M.
- Écrire l'équation de T donnée par le logiciel : $y = 7{,}39x - 7{,}39$.
- Quelle particularité présente cette équation ? Les coefficients a et b sont opposés.
- Justifier par un calcul : $y = e^2(x - 2) + e^2$; $y = e^2x - e^2$.

J'utilise un logiciel (tableur)

Ajuster un nuage de points

Étude de la demande et de l'offre pour un produit

L'objectif de l'activité est l'étude de la demande et de l'offre pour un nouveau produit de grande consommation.
On désigne par x le prix unitaire du produit en euros, par d la demande en milliers d'unités et par r l'offre en milliers d'unités. Une étude statistique a donné les résultats suivants :

x_i en euros	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
d_i en milliers	7,8	6,1	4,7	3,7	3	2,5	2,2	2
r_i en milliers	0,9	1,4	1,7	1,9	2,1	2,3	2,4	2,6

Ouvrir le fichier « 08_ajustement.xls » ou « 08_ajustement.ods ».

1. Étude de la demande (graphique 1)

On pose $y = \ln d$.

a. Compléter la ligne de y dans le tableau 1 à l'aide de la fonction LN du tableur.

b. Sélectionner les lignes de x et y. Représenter le nuage de points correspondant.

c. Ajuster ce nuage par une droite dont on affichera l'équation.

d. Montrer, à l'aide de cette équation, que $d = 8{,}79\ \mathrm{e}^{-0{,}40x}$ (coefficients arrondis au centième).

$y = -0{,}3983x + 2{,}1731$; $\ln d = -0{,}3983x + 2{,}1731$; $d = e^{-0{,}3983x} \times e^{2{,}1731}$; $d = 8{,}79e^{-0{,}40x}$.

e. Utiliser la relation donnée au d. pour calculer la demande si le prix unitaire est de 5 euros.

$d = (8{,}79 \times e^{-0{,}4 \times 5}) \times 1\,000 \approx 1\,190$.

2. Étude de l'offre (graphique 2)

On pose $z = \mathrm{e}^{r}$.

a. Compléter la ligne de z dans le tableau 2 à l'aide de la fonction EXP du tableur.

b. Sélectionner les lignes de x et z. Représenter le nuage de points correspondant.

c. Ajuster ce nuage par une droite dont on affichera l'équation.

d. Montrer, à l'aide de cette équation, que $r = \ln(3{,}02x + 0{,}87)$.

$y = 3{,}0202x + 0{,}8672$; $e^{r} = 3{,}0202x + 0{,}8672$; $r = \ln(3{,}02x + 0{,}87)$.

e. Utiliser la relation donnée au d. pour calculer l'offre si le prix unitaire est de 5 euros.

$r = \ln(3{,}02 \times 5 + 0{,}87) \times 1\,000 \approx 2\,771$.

3. Prix d'équilibre

Déterminer graphiquement (calculatrice ou tableur) une valeur arrondie à 10 centimes du prix de vente pour lequel la demande est égale à l'offre : 3,30 €.

Exercices & Problèmes

Exercices p. 103 et 104

1. QCM

a. 0,135.

b. ln e = 1.

c. 15 e^{3x}.

d. décroissante.

2. Vrai – Faux

a. Faux.

b. Vrai.

c. Faux.

d. Vrai.

3. Textes à barrer

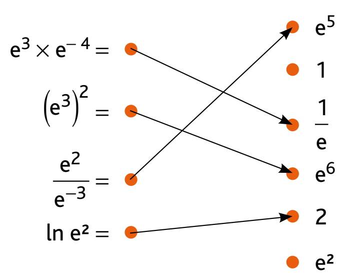
a. toujours positif.

b. n'a pas de solution.

c. a pour solution e^{-3}.

d. $f'(x) = e^x$.

4. Associer



› Calculer une exponentielle

5. $e^5 \approx 148,41$; $e^{-1} \approx 0,37$; $e^{0,1} \approx 1,11$; $e^{-0,02} \approx 0,98$; $e^0 = 1$; $e^1 \approx 2,72$; $e^{4,5} \approx 90,02$.

6. $f(-2) \approx 2,44$; $f(-1) \approx 2,21$; $f(0) = 2$; $f(1) \approx 1,81$; $f(2) \approx 1,64$.

› Appliquer les propriétés opératoires

7. $e^3 \times e^{2,5} = e^{5,5}$; $\frac{e^{1,3}}{e^{-2}} = e^{3,3}$; $e^{-4} \times e = e^{-3}$; $\left(e^{-5}\right)^2 = e^{-10}$.

8. $e^{x-4} = e^{-4} \times e^x$; $e^{3-x} = \frac{e^3}{e^x}$; $e^{2x-1} = e^{-1} \times \left(e^x\right)^2$

› Résoudre des équations et des inéquations

9. $\ln x = 2,5$; $x = e^{2,5}$.
$\ln x = -4$; $x = e^{-4}$.
$2 \ln x = 10$; $\ln x = 5$; $x = e^5$.
$4 \ln x - 1 = -11$; $\ln x = -2,5$; $x = e^{-2,5}$.

10. $e^x = 12$; $x = \ln 12$.
$e^x = 0,5$; $x = \ln 0,5$.
$e^x = 1$; $x = 0$.
$e^x = 0$; cette équation n'a pas de solution.
$e^x = -3$; cette équation n'a pas de solution.

11. $e^{2x} = 3,2$; $2x = \ln 3,2$; $x = 0,5 \ln 3,2$.
$e^{-5x} = 14$; $-5x = \ln 14$; $x = -0,2 \ln 14$.
$4\,e^{0,1x} = 12$; $e^{0,1x} = 3$; $0,1x = \ln 3$; $x = 10 \ln 3$.
$-5e^{-0,8x} = 10$; $e^{-0,8x} = -2$; cette équation n'a pas de solution.

12. $\ln x > 2$; $x > e^2$.
$\ln x \leq 8$; $x \leq e^8$.
$2 \ln x + 3 < 13$; $\ln x < 5$; $x < e^5$.
$4 - \ln x \geq 12$; $\ln x \leq -8$; $x \leq e^{-8}$.

13. $e^x < 1,5$; $x < \ln 1,5$.
$e^{2x} \geq 1$; $2x \geq \ln 1$; $x \geq 0$.
$e^{-0,2x} < 0$; cette inéquation n'a pas de solution.
$e^{0,5x} - 1 > 2$; $e^{0,5x} > 3$; $0,5x > \ln 3$; $x > 2 \ln 3$.
$3\,e^{4x} \geq 6$; $e^{4x} > 2$; $4x > \ln 2$; $x > 0,25 \ln 2$.

› Étudier une fonction comportant une exponentielle

14. a. La fonction exponentielle de base e, notée f, est croissante.

b. f_1 est croissante car on multiplie f par une constante positive.
f_2 est décroissante car on multiplie f par une constante négative.
f_3 est croissante car on ajoute une constante à f.
f_4 est décroissante car on multiplie f par une constante négative.

15. a. $f'(x) = 3,5\,e^{3,5x}$; f est croissante.

b. $f'(x) = -0,2\,e^{-0,2x}$; f est décroissante.

c. $f'(x) = -20\ e^{5x}$; f est décroissante.

d. $f'(x) = 3\ e^{-10x}$; f est croissante.

16. $f(x) = e^{0,3x-2}$.

a. $f(x) = e^{-2}e^{0,3x}$. On a donc $k = e^{-2}$.

b. $f'(x) = 0,3e^{-2}e^{0,3x}$

c. $f'(x) > 0$ car c'est le produit de trois nombres positifs.

d. La fonction f est donc croissante.

17. Fonctions croissantes : f ; i ; j ; k.
Fonctions décroissantes : g ; h ; l.

Problèmes p. 98 à 100

› Problème 1

Offre et demande d'un produit

1. a. $f(3) \approx 70,287$. Le nombre d'objets offerts sur le marché pour un prix unitaire de 3 € est 70 287.
$f(5) \approx 257,903$. Le nombre d'objets offerts sur le marché pour un prix unitaire de 5 € est 257 903.

b. $g(3) \approx 209,963$. Le nombre d'objets demandés par les consommateurs pour un prix unitaire de 3 € est 209 963.
$g(5) \approx 104,264$. Le nombre d'objets demandés par les consommateurs pour un prix unitaire de 5 € est 104 264.

c. $f'(x) = 6,5\ e^{0,65x}$. Cette dérivée est positive quel que soit x. La fonction f est croissante.
$g'(x) = -210\ e^{-0,35x}$. Cette dérivée est négative quel que soit x. La fonction g est décroissante.

d. L'offre augmente avec le prix ; la demande diminue quand le prix augmente.

e. $10\ e^{0,65x} = 500$; $e^{0,65x} = 50$; $0,65x = \ln 50$;

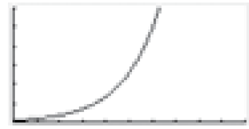
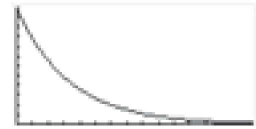
$$x = \frac{\ln 50}{0,65} \approx 6,02.$$

Quand le prix unitaire est de 6,02 €, l'offre est de 500 000 objets.
$600\ e^{-0,35x} \leq 300$; $e^{-0,35x} \leq 0,5$; $-0,35x \leq \ln 0,5$;

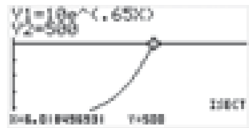
$$x \geq \frac{\ln 0,5}{-0,35}\ ; x \geq 2.$$

Lorsque le prix unitaire est supérieur ou égal à 2 €, la demande est inférieure ou égale à 300 000 objets.

2. b. La courbe représentative de f est bien celle d'une fonction croissante. La courbe représentative de g est bien celle d'une fonction décroissante.

c.



d.

$x \approx 4,09$.
L'offre est égale à la demande pour un prix unitaire de 4,09 €. C'est le prix d'équilibre.

› Problème 2

Évolution de la population d'une grande ville

1. a.

Rang de l'année : t_i	0	5	10	15	20	25
$y_i = \ln p_i$	1,609	1,723	1,808	1,917	2,028	2,128

c. $y = 0,021t + 1,61$.

d. $\ln p = 0,021t + 1,61$; $p = e^{0,021t+1,61}$;
$p = e^{1,61} \times e^{0,02t}$; $p = 5\ e^{0,02t}$.

e. $p_{35} = 5 \times e^{0,02 \times 35} \approx 178,535$ millions d'habitants.

2. a. $f'(t) = 0,02 \times 5\ e^{0,02t} = 0,1\ e^{0,02t}$.

b. Cette dérivée est positive.

c.

t	-25	35
$f(t)$	3,03 ↗	10,07

e. $5\ e^{0,02t} = 9$; $e^{0,02t} = 1,8$; $0,02t = \ln 1,8$;

$$t = \frac{\ln 1,8}{0,02} = 50 \ln 1,8.$$

3. a. $f(28) = 5 \times e^{0,02 \times 28} \approx 8,8$ millions d'habitants.

b. $t > 50 \ln 1,8$; $t > 29,39$.
La population dépassera 9 millions d'habitants au cours de l'année de rang 30.

› Problème 3
La radioactivité du césium 137

1. a. $A(100) = 3 \times 10^5\ e^{-0{,}023 \times 100} = 30\ 078$ Bq $= 3{,}01 \times 10^4$ Bq.

b. $1{,}5 \times 10^5 = 3 \times 10^5\ e^{-0{,}023t}$; $e^{-0{,}023t} = 0{,}5$;
$-0{,}023t = \ln 0{,}5$; $t = \dfrac{\ln 0{,}5}{-0{,}023}$.
$t \approx 30$ années.

2. a.

t	0	40	80	100	140	180
$f(t)$	1	0,40	0,16	0,10	0,04	0,02

b. $f'(t) = -0{,}023 \times e^{-0{,}023t}$.

c. La dérivée est négative.

d.

t	0	180
$f(t)$	1 ↘	0,02

e. $e^{-0{,}023t} = 0{,}2$; $-0{,}023t = \ln 0{,}2$; $t = \dfrac{\ln 0{,}2}{-0{,}023}$

g. $t \approx 70$.

3. L'activité radioactive est de 20 % de sa valeur initiale au bout de 70 ans.

› Problème 4
Pas de panne !

1. a. 1. $f_1(1) \approx 0{,}7788$; $f_1(3) \approx 0{,}4723$.
La probabilité pour que le composant C_1 fonctionne sans panne au bout de 1 000 heures est 0,7788.
La probabilité pour que le composant C_1 fonctionne sans panne au bout de 3 000 heures est 0,4723.

b. $f_2(1) \approx 0{,}6065$; $f_2(3) \approx 0{,}2231$.
La probabilité pour que le composant C_2 fonctionne sans panne au bout de 1 000 heures est 0,6065.
La probabilité pour que le composant C_2 fonctionne sans panne au bout de 3 000 heures est 0,2231.

c. $f_1'(t) = -0{,}25e^{-0{,}25t}$. Cette dérivée est négative quel que soit t. La fonction f_1 est décroissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
$f_2'(t) = -0{,}5e^{-0{,}5t}$. Cette dérivée est négative quel que soit t. La fonction f_2 est décroissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

d. Plus le nombre d'heures d'utilisation des composants est grand, plus la probabilité de ne pas avoir de panne diminue.

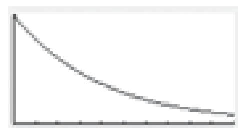
e. $e^{-0{,}25t} = 0{,}4$; $-0{,}25t = \ln 0{,}4$; $t = \dfrac{\ln 0{,}4}{-0{,}25}$; $t \approx 3{,}665$.

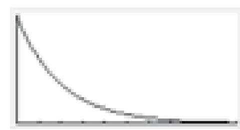
$e^{-0{,}5t} \geq 0{,}3$; $-0{,}5t \geq \ln 0{,}3$; $t \leq \dfrac{\ln 0{,}3}{-0{,}5}$; $t \leq 2{,}408$.

La probabilité de ne pas avoir de panne avec le composant C_1 est égale à 0,4 après 3 665 heures d'utilisation.

f. La probabilité de ne pas avoir de panne avec le composant C_1 est supérieure ou égale à 0,3 tant qu'on ne dépasse pas 2 408 heures d'utilisation.

2. a. y est compris entre 0 et 1.
X min : 0 ; X max : 10 ; pas : 1 ; Y min : 0 ; Y max : 1 ; pas : 0,1.

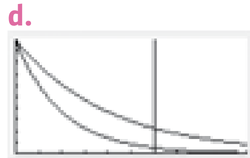




b. Les courbes représentatives de f et g sont bien celles de fonctions décroissantes.

c.

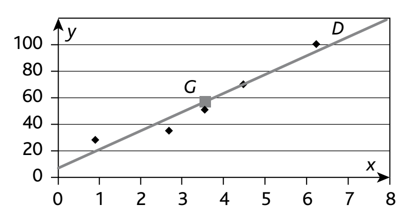
d.



$f_1(6\ 000) > f_2(6\ 000)$
Le composant C_1 a la plus grande probabilité de fonctionner sans panne après 6 000 heures d'utilisation.

› Problème 5
Consommation des ménages

1.



2. $G(4\,;57{,}3)$

3. a. $57{,}3 = 12{,}5 \times 4 + b$; d'où $b = 7{,}3$.

4. $y = 12{,}5 \times 8 + 7{,}3 = 107{,}3$.

5. La consommation estimée des ménages en 2011 est 107 300 €.
$\dfrac{140\ 000 - 107\ 300}{140\ 000} \approx 0{,}2335$, soit 23 %.

6. a.

x_i	1	3	4	5	7	8
$z_i = \ln y_i$	3,35	3,56	3,95	4,26	4,61	4,94

b. Voir fichier « 08_probleme5.xls » ou « 08_probleme5.ods »
$z = 0{,}23x + 3{,}02$.

c. $\ln y = 0{,}23x + 3{,}02$; $y = e^{0{,}23x + 3{,}02} = e^{0{,}23x} \times e^{3{,}02}$.
D'où $y = 20{,}49\, e^{0{,}23x}$.

d. En 2013, on a $x = 10$.
$y = 20{,}49\, e^{0{,}23 \times 10} \approx 204{,}37$.
La consommation estimée des ménages en 2013 est 204 370 €.

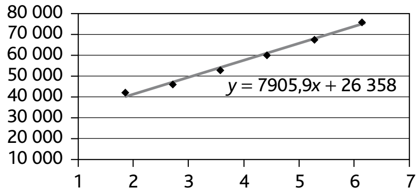
Évaluation 1

(Livre élève page 109)

Énergie éolienne

EXERCICE 1

1 et **2**



3 On peut estimer la puissance du parc européen en 2012 à :
$7\,906 \times 2012 + 26\,358 = 15\,933\,230$ mégawatts.

EXERCICE 2

1 Pour tout v dans l'intervalle [5 ; 20], $f\,'(v) = 3 \times 733\ v^2 = 2\,199\ v^2$.
Pour tout v dans l'intervalle [5 ; 20], $f\,'(v) > 0$.

2

v	5	20
$f'(v)$	+	
$f(v)$	91 625 ↗	5 864 000

3 $f(v) = 2.10^6$ équivaut à $733\ v^3 = 2.10^6$ c'est-à-dire $v^3 = \dfrac{2.10^6}{733}$ d'où $v = \left(\dfrac{2.10^6}{733}\right)^{\frac{1}{3}}$
donc $v \approx 14$ mètres par seconde.

Remarque : sans utiliser la puissance $\frac{1}{3}$ (ou la racine cubique), on peut obtenir cette valeur par balayage à l'aide de la calculatrice ou du tableur.

VERS LE BAC PRO

Évaluation 2

(Livre élève page 111)

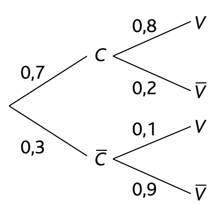
Techniques commerciales

EXERCICE 1

1 Les employés étant tirés au hasard, les probabilités s'obtiennent à partir des fréquences indiquées.

	L'employé a une voiture de fonction	L'employé n'a pas de voiture de fonction	Total
L'employé est un commercial $\overline{C}$	$0{,}7 \times 0{,}8 = 0{,}56$ $\overline{V}$	$0{,}7 \times 0{,}2 = 0{,}14$ $\overline{V}$	0,70
L'employé n'est pas un commercial $\overline{C}$	$0{,}3 \times 0{,}10 = 0{,}03$	$0{,}3 \times 0{,}90 = 0{,}27$	0,30
Total	0,59	0,41	1

ou



2 **a.** $p(C) = 0{,}7$
b. $p_C(V) = 0{,}7 \times 0{,}8 = 0{,}56$
c. $p_{\overline{C}}(V) = 0{,}3 \times 0{,}10 = 0{,}03$.

3 $\overline{C} \cap V$ est l'événement « l'employé n'est pas un commercial et il a une voiture de fonction ».
$p(\overline{C} \cap V) = 0{,}03$.

EXERCICE 2

1 La suite (u_n) est une suite géométrique puisque chaque année, le nombre de clients doit augmenter de 5 %, c'est-à-dire être multiplié par 1,05.

2 $u_n = 1\,700 \times 1{,}05n$

3 En 2015, le nombre de clients sera $u_5 = 1\,700 \times 1{,}05^5 = 2\,169{,}67$ soit environ 2 170 clients.

4 Pour connaître le nombre de clients prévus en 2020, on calcule u_{10} soit :
$U_{10} = 1\,700 \times 1{,}0510 \approx 2\,769{,}12$
L'objectif de 5 000 clients en 2020, avec une augmentation de 5 %, ne sera pas atteint.

5 Avec le tableur, on trouve qu'il faut un coefficient multiplicateur de 1,114 qui correspond à 11,4 %, c'est-à-dire l'augmentation minimale annuelle permettant d'obtenir 5 000 clients en 2020.

Évaluation 3

(Livre élève page 113)

Fabrication de vis

EXERCICE 1

a. $C_M(x) = x^2 - 30x + 300$

b. On fait cette étude soit à l'aide de la fonction dérivée, soit à partir des coordonnées du sommet de la parabole.
Le minimum de C_M sur [0 ; 20] est pour $x = 15$.

c. Le coût de production minimal $C_M(15)$ vaut 75 milliers d'euros.
La production correspondante $C(15)$ vaut 1 125 milliers d'euros.

EXERCICE 2

a.

	Vis présentant le défaut (a)	Vis ne présentant pas le défaut (a)	Total
Vis présentant le défaut (b)	80	160	240
Vis ne présentant pas le défaut (b)	200	1 560	1 760
Total	280	1 720	**2 000**

b.

	a	$\bar{a}$	Total
b	$\frac{80}{2\,000} = 0{,}04$	$\frac{160}{2\,000} = 0{,}08$	0,12
$\bar{b}$	$\frac{200}{2\,000} = 0{,}1$	$\frac{1560}{2\,000} = 0{,}78$	0,88
Total	0,14	0,86	1

c. $P(\text{a} \cup \text{b}) = 0{,}04 + 0{,}08 + 0{,}14 = 0{,}26$.
La probabilité que la vis présente au moins l'un des deux défauts est 0,26.

d. La probabilité que la vis ne présente aucun défaut est 0,86.

VERS LE BAC PRO

Évaluation 4

(Livre élève page 115)

Placement d'un capital

1 **a.** La fonction $x \mapsto 1{,}04^x$ est croissante car 1,04 est supérieur à 1.
Cette fonction est multipliée par 50 000, nombre positif.
Donc la fonction f est croissante.

b. $50\,000 \times 1{,}04^x \geq 90\,000$; $1{,}04^x \geq 1{,}8$; $x \ln 1{,}04 \geq \ln 1{,}8$; $x \geq \dfrac{\ln 1{,}8}{\ln 1{,}04}$; $x \geq 14{,}98$.

Le nombre minimum d'années de placement demandé est 15 ans.

c. $f(18) = 50\,000 \times 1{,}04^{18} \approx 101\,290{,}83$.

La valeur acquise au bout de 18 ans est environ 101 291 €.

2 **a.** $g'(x) = -\,250x + 4\,250$.

$g'(x) = 0$ pour $x = 17$.

x	0		17		20
$f'(x)$		+	0	–	
$f(x)$	50 000	↗	86 125	↘	85 000

b. La fonction g passe par son maximum pour $x = 17$.

c. La valeur acquise par le capital est alors 86 125 €.

3 **a.** $f(18) = 101\,291$ et $g(18) = 86\,000$.

Le placement le plus intéressant est donc le placement A.

b. $f(10) = 74\,012$ et $g(10) = 80\,000$.

Le placement le plus intéressant est donc le placement B.

VERS LE BAC PRO

STDI

Éditions Foucher - Vanves – AOÛT 2011 – 01 – IH - DL / DC

Imprimé en France par Jouve