

## ■ Méthode matricielle

**Mise en garde.** Les outils associés seront développés dans le cadre du cours de mathématiques relatif aux applications linéaires ; ne sont présentées ici que les techniques de calculs. Cette formulation matricielle adaptée aux calculs informatiques est appréciée pour sa compacité d'écriture.

Cette méthode permet le passage, **en coordonnées cartésiennes uniquement**, des coordonnées connues d'un point  $M$  dans l'espace lié au repère  $R_2$  aux coordonnées cartésiennes du point  $M$  dans l'espace lié au repère  $R_1$ .

On écrit de nouveau  $\overrightarrow{O_1M} = \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2M}$ . Cette expression vectorielle intrinsèque ne met pas en évidence les composantes dans une seule base. Cette écriture vectorielle peut se mettre sous une autre forme prenant en compte la base de projection.

$$[\overrightarrow{O_1M}]_{R_1} = [\overrightarrow{O_1O_2}]_{R_1} + [\overrightarrow{O_2M}]_{R_1}$$

Chaque colonne est constituée des trois composantes du vecteur dans la base de  $R_1$  : c'est la matrice colonne relative à  $R_1$ .

La matrice cherchée  $[\overrightarrow{O_1M}]_{R_1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}_{R_1}$  et la matrice connue  $[\overrightarrow{O_1O_2}]_{R_1} = \begin{bmatrix} x_{O_2} \\ y_{O_2} \\ z_{O_2} \end{bmatrix}_{R_1}$  sont

exprimées dans  $R_1$ .

La matrice colonne  $[\overrightarrow{O_2M}]_{R_1}$  est à déterminer à partir de  $[\overrightarrow{O_2M}]_{R_2}$  connue dans  $R_2$ .

On montre en mathématiques que :

$$[\overrightarrow{O_2M}]_{R_1} = \tilde{B}_{1/2} [\overrightarrow{O_2M}]_{R_2} = \begin{bmatrix} \text{Matrice de} \\ \text{passage} \\ B_1 \text{ à } B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}_{R_2}$$

L'addition vectorielle  $[\overrightarrow{O_1M}]_{R_1} = [\overrightarrow{O_1O_2}]_{R_1} + [\overrightarrow{O_2M}]_{R_1}$  s'écrit sous forme de composantes :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}_{R_1} = \begin{bmatrix} x_{O_2} \\ y_{O_2} \\ z_{O_2} \end{bmatrix}_{R_1} + \begin{bmatrix} \text{Matrice de} \\ \text{passage} \\ B_1 \text{ à } B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}_{R_2}$$

ou bien  $[\overrightarrow{O_1M}]_{R_1} = [\overrightarrow{O_1O_2}]_{R_1} + \tilde{B}_{1/2} [\overrightarrow{O_2M}]_{R_2}$ , formulation synthétique dans laquelle

$\tilde{B}_{1/2}$  désigne l'opérateur matriciel de changement de la base.

Il faut connaître la matrice (trois colonnes, trois lignes) de passage des composantes dans  $R_2$  aux composantes dans  $R_1$ .

Les colonnes de la matrice de passage de la base de  $R_1$  à la base de  $R$  sont constituées des projections des vecteurs de la base de  $R_2$  sur les vecteurs de la base de  $R_1$ .

### Exemple Robot soudeur

$$\overrightarrow{O_1M} = \overrightarrow{O_1A} + \overrightarrow{AM} = a\vec{x}_1 + b\vec{y}_1 + c\vec{z}_1 + R\vec{i} \text{ avec } \vec{i} = \cos\alpha \vec{x}_2 + \sin\alpha \vec{y}_2$$

Dans cet exemple,  $O_2 = A$ .

Il faut d'abord passer en coordonnées cartésiennes.

$$\overrightarrow{O_1M} = a\vec{x}_1 + b\vec{y}_1 + c\vec{z}_1 + R(\cos\alpha \vec{x}_2 + \sin\alpha \vec{y}_2)$$

$$\text{soit } [\overrightarrow{O_1M}]_{R_1} = [\overrightarrow{O_1A}]_{R_1} + \tilde{B}_{1/2} [\overrightarrow{AM}]_{R_2}$$

Dans le cas particulier :  $\psi = 0$  et  $\varphi = 0$ , la matrice de changement de base s'écrit (figure 1.20) :

$$\tilde{B}_{1/2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \text{ avec } [\overrightarrow{AM}]_{R_2} = \begin{bmatrix} R \cos\alpha \\ R \sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B}_{1/2} = [\overrightarrow{AM}]_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R \cos\alpha \\ R \sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \cos\alpha \\ R \sin\alpha \cos\theta \\ R \sin\alpha \sin\theta \end{bmatrix}_{R_2}$$

On obtient les coordonnées cartésiennes cherchées du point M dans le repère  $R_1$  lié au socle :

$$x_1 = \overrightarrow{O_1M} \cdot \vec{x}_1 = a + R \cos\alpha$$

$$y_1 = \overrightarrow{O_1M} \cdot \vec{y}_1 = b + R \sin\alpha \cos\theta$$

$$z_1 = \overrightarrow{O_1M} \cdot \vec{z}_1 = c + R \sin\alpha \sin\theta$$

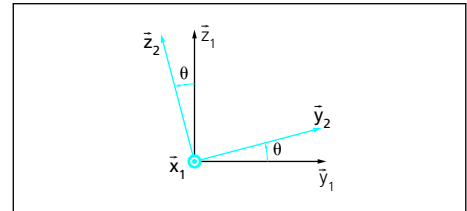


Figure 1.20

## Une autre approche de la dérivée d'un vecteur unitaire par rapport à un repère

On a vu à travers les exemples que l'orientation d'un vecteur unitaire  $\vec{u}$  par rapport à un repère  $R$  dépend d'un certain nombre de paramètres angulaires  $\alpha_i$  de rotation autour de vecteurs unitaires  $\vec{e}_i$ .

**Exemples.** En coordonnées cylindriques, le vecteur  $\vec{n}$  dépend de l'angle  $\theta$  de rotation autour de  $\vec{z}$ .

Lorsque l'on utilise les angles d'Euler :

- le vecteur  $\vec{n}$  dépend de l'angle  $\psi$  de rotation autour de  $\vec{z}_1$  ;
- le vecteur  $\vec{z}_2$  dépend de l'angle  $\psi$  de rotation autour de  $\vec{z}_1$  et de l'angle  $\theta$  de rotation autour de  $\vec{n}$  ;
- le vecteur  $\vec{x}_2$  dépend de l'angle  $\psi$  de rotation autour de  $\vec{z}_1$ , de l'angle  $\theta$  de rotation autour de  $\vec{n}$ , et de l'angle  $\varphi$  de rotation autour de  $\vec{z}_1$ .

On montre en mathématiques que si une grandeur  $G$  dépend de  $n$  paramètres  $\alpha_i$

fonctions du temps, alors  $\frac{dG}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial G}{\partial \alpha_i} \cdot \frac{d\alpha_i}{dt}$  où  $\frac{\partial G}{\partial \alpha_i}$  est la dérivée partielle de  $G$

par rapport à  $\alpha_i$  qui s'interprète comme la dérivée de  $G$  si seul le paramètre  $\alpha_i$  varie.

Soit ici pour un vecteur unitaire  $\vec{u}$  dont la position par rapport à un repère de référence  $R$  dépend des paramètres angulaires  $\alpha_i$ , fonctions du temps :

$$\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_R = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \alpha_i}\right)_R \cdot \frac{d\alpha_i}{dt}$$

Recherchons l'expression de la dérivée partielle  $\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \alpha_i}\right)_R$  avec  $\alpha_i$  rotation autour

du vecteur unitaire  $\vec{e}_i$  du repère intermédiaire  $(\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k)$ .

La figure 3.6 montre, en perspective, la position du vecteur à dériver  $\vec{u}$  par rapport au repère intermédiaire  $(\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k)$  (selon l'exemple cité précédemment des angles d'Euler, si on identifie  $\vec{u}$  à  $\vec{x}_2$ ,  $\vec{e}_i$  peut être identifié à  $\vec{z}_1$ ,  $\vec{n}$  ou  $\vec{z}_2$  et  $\alpha_i$  respectivement à  $\psi$ ,  $\theta$  ou  $\varphi$ ).

En considérant que le vecteur  $\vec{u}$  fait un angle  $\theta$  avec  $\vec{e}_i$ , on peut écrire :

$$\vec{u} = \cos\theta \vec{e}_i + \sin\theta \vec{p}_i$$

$$\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \alpha_i}\right)_R = \frac{\partial}{\partial \alpha_i}(\cos\theta \vec{e}_i + \sin\theta \vec{p}_i)$$

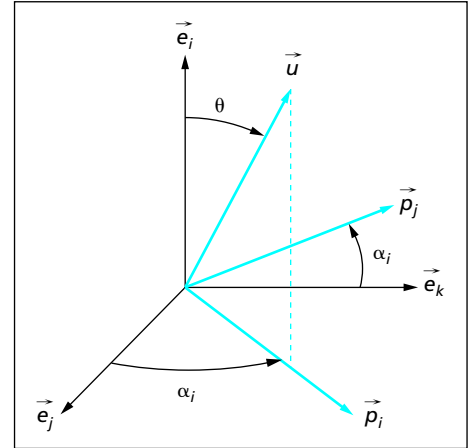


Figure 1.21

Si on considère que seul le paramètre  $\alpha_i$  varie,  $\theta$  est constant seuls  $\vec{p}_i$  et  $\vec{p}_j$  varient lors de la notation d'angle  $\alpha_i$  ce qui permet de calculer la dérivée partielle :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \alpha_i}\right)_R &= \frac{d}{d\alpha_i}(\sin\theta \vec{p}_i) \\ &= \frac{d}{d\alpha_i} \sin\theta (\cos\alpha_i \vec{e}_j + \sin\alpha_i \vec{e}_k) \\ &= \sin\theta (-\sin\alpha_i \vec{e}_j + \cos\alpha_i \vec{e}_k) \\ &= \sin\theta \vec{p}_j \end{aligned}$$

On remarque que  $\sin\theta \vec{p}_j = \vec{e}_i \wedge \vec{u}$  donc  $\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \alpha_i}\right)_R = \vec{e}_i \wedge \vec{u}$  et donc comme :

$$\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_R = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \alpha_i}\right)_R \cdot \frac{d\alpha_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{e}_i \wedge \vec{u} \cdot \frac{d\alpha_i}{dt} = \left(\sum_{i=1}^n \vec{e}_i \cdot \frac{d\alpha_i}{dt}\right) \wedge \vec{u}$$

En définissant  $\vec{\Omega}_{Ru/R} = \left(\sum_{i=1}^n \vec{e}_i \cdot \frac{d\alpha_i}{dt}\right)$  il vient :

$$\boxed{\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_R = \vec{\Omega}_{Ru/R} \wedge \vec{u}}$$