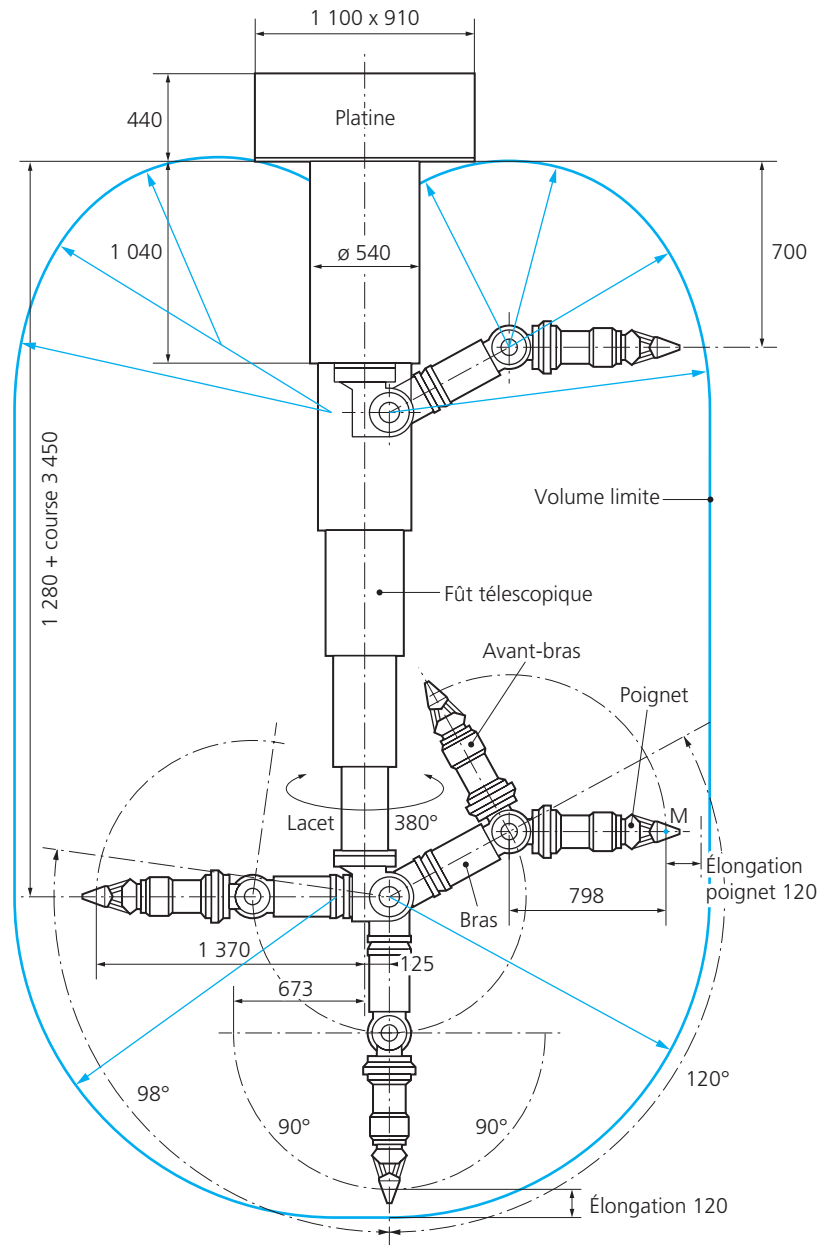


SOLUTIONS DES EXERCICES

Solutions des exercices

- C4** • 1. Coordonnées cartésiennes : l'abscisse x suffit.
 2. Coordonnées polaires.
 3. Coordonnées cylindriques.
 4. Un segment de droite longueur 120 mm.
 5. Un cercle ayant pour centre l'axe d'articulation avant-bras/bras.
 6. Voir figure ; le volume est un volume de révolution ayant pour axe l'axe du fût télescopique.

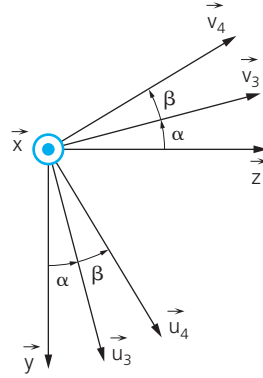


C5 • 1. On peut utiliser les coordonnées cartésiennes en attachant au bâti O le repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, ou les coordonnées cylindriques en attachant au bâti O le repère $(O', \vec{x}', \vec{y}', \vec{z}')$ tel que $OO' = AB$.

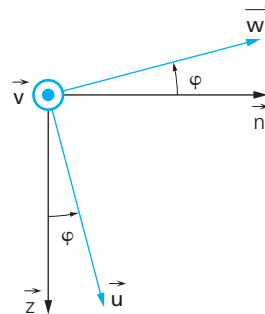
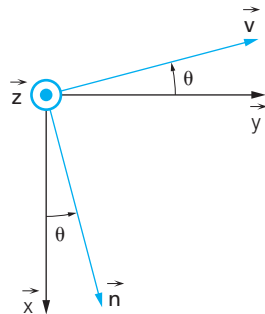
2. $\vec{OD} = x\vec{x} + [a + l(\cos \alpha + \cos(\alpha + \beta))]\vec{y} + l[\sin \alpha + \sin(\alpha + \beta)]\vec{z}$

- Voir figure ci-contre.
- Matrice de passage $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ à $(\vec{x}, \vec{u}_3, \vec{v}_3)$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$
remplacer α par $(\alpha + \beta)$ pour avoir la matrice de passage de $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ à $(\vec{x}, \vec{u}_4, \vec{v}_4)$.
- Pour que D décrive une droite passant par B, $\theta = \text{constante}$, mais $\theta - \alpha = \frac{\beta}{2}$ (relation triangle isocèle) $\Rightarrow \left(\frac{\beta}{2} + \alpha\right) = \text{constante}$.
- La trajectoire de D dans un espace lié à 3 est un cercle de centre C et de rayon l.

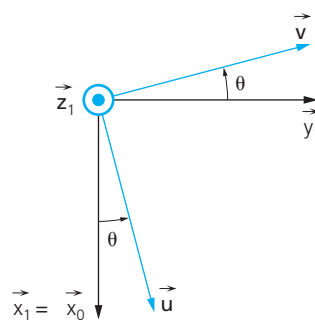
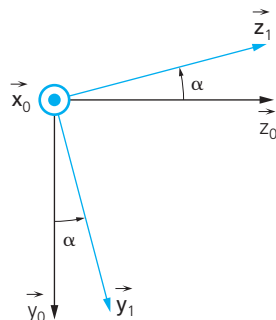


C6 • 1.



- $\vec{V}_{M/R_0} = \dot{\rho} \vec{u} + \rho(\dot{\theta} \sin \psi \vec{v} + \dot{\psi} \vec{w})$
 $\vec{a}_{M/R_0} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\psi}^2) \vec{u} + (2 \dot{\rho} \dot{\theta} \sin \psi + 2 \rho \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \psi + \rho \ddot{\theta} \sin \psi) \vec{v} + (2 \dot{\rho} \dot{\psi} + \rho \ddot{\psi}) \vec{w} - \rho \dot{\theta}^2 \sin \psi \vec{n}$
- $\vec{a}_{M/R_0} \cdot \vec{u} = \ddot{\rho} - \rho \dot{\psi}^2 - \rho \dot{\theta}^2 \sin^2 \psi$

C7 • 1.



- $\dot{\theta} = \frac{v}{R}$.
- $\vec{V}_{M/R_0} = R \dot{\alpha} \sin \theta \vec{z}_1 + R \dot{\theta} \vec{v}$ avec $\dot{\alpha} = \alpha_0 \omega \cos \omega t$ et $\dot{\theta} = \frac{v}{R}$.
- $\vec{a}_{M/R_0} = (R \ddot{\alpha} \sin \theta + 2 R \dot{\alpha} \dot{\theta} \cos \theta) \vec{z}_1 - R \dot{\alpha}^2 \sin \theta \vec{y}_1 - R \dot{\theta}^2 \vec{u}$ avec $\ddot{\alpha} = -\alpha_0 \omega^2 \sin \omega t$.

C8 • 1. $\vec{\Omega}_{S_1/R_0} = \dot{\alpha}_1 \vec{x}_0$; $\vec{\Omega}_{S_2/S_1} = (\dot{\alpha}_2 - \dot{\alpha}_1) \vec{x}_0$; $\vec{\Omega}_{S_2/R_0} = \dot{\alpha}_2 \vec{x}_0$.

- $\vec{V}_{O_2 \in S_1/R_0} = \vec{V}_{O_1 \in S_1/R_0} + \vec{O_2 O_1} \wedge \vec{\Omega}_{S_1/R_0} = -\dot{\alpha}_1 l_1 \vec{y}_1$.

$$3. \vec{V}_{M \in S_2/R_0} = \vec{V}_{O_2 \in S_2/R_0} + \vec{MO}_2 \wedge \vec{\Omega}_{S_2/R_0} = -l_1 \dot{\alpha}_1 \vec{y}_1 - l_2 \dot{\alpha}_2 \vec{y}_2.$$

$$C9 \bullet 1. \vec{\Omega}_{S_1/R_0} = \dot{\theta} \vec{X}_1; \vec{\Omega}_{S_2/S_1} = \dot{\alpha}_1 \vec{Z}_1; \vec{\Omega}_{S_2/S_0} = \dot{\theta} \vec{X}_1 + \dot{\alpha}_1 \vec{Z}_1.$$

$$2. \vec{V}_{A \in S_1/R_0} = \vec{V}_{O \in S_1/R_0} + \vec{AO} \wedge \vec{\Omega}_{S_1/R_0} \quad \vec{V}_{A \in S_1/R_0} = a \dot{\theta} \vec{Z}_1$$

$$3. \vec{V}_{G \in S_2/R_0} = \vec{V}_{A \in S_2/R_0} + \vec{GA} \wedge \vec{\Omega}_{S_2/R_0}$$

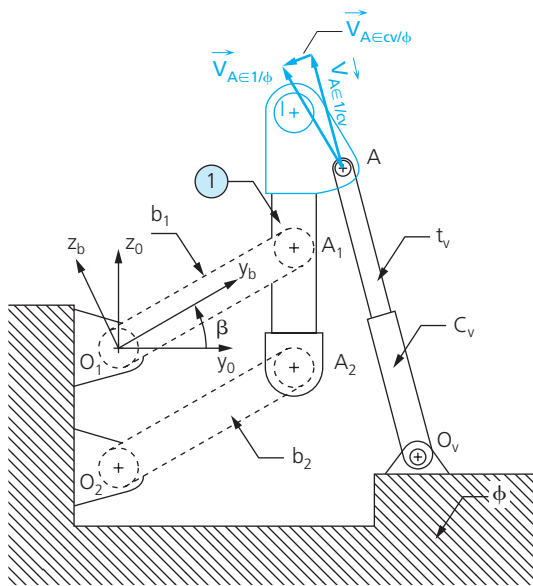
$$\vec{V}_{G \in S_2/R_0} = -(x \sin \alpha + y \cos \alpha) \dot{\alpha} \vec{X}_1 + [(x \cos \alpha - y \sin \alpha) \dot{\alpha} - z \dot{\theta}] \vec{Y}_1 + (x \sin \alpha - y \cos \alpha + a) \dot{\theta} \vec{Z}_1$$

C10 • 1. O_1, A_1, A_2, O_2 est un parallélogramme, $\vec{A_2A_1}$ reste parallèle à $\vec{O_2O_1} \Rightarrow \vec{\Omega}_{1/\phi} = \vec{0}$. Le mouvement de ① est un mouvement de translation circulaire, tous les points ont la même vitesse.

$$\vec{V}_{A_1} = \vec{V}_A = l\dot{\beta} \vec{z}_b \text{ module } l\dot{\beta}$$

$$= l\dot{\beta}(-\sin\beta \vec{y}_0 + \cos\beta \vec{z}_0)$$

2.

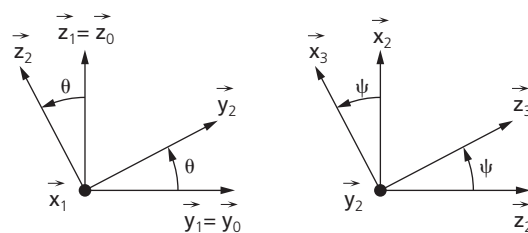


$$\vec{V}_{A \in I/\phi} = \vec{V}_{A \in I/CV} + \vec{V}_{A \in CV/\phi}$$

$$\vec{V}_{A \in I/\phi} \approx 1,03 \text{ m/s } \vec{z}_b$$

$$\dot{\beta} = \frac{1,03}{1,22} = 0,84 \text{ rad/s}$$

3.



$$4. \vec{V}_{G,3/\phi} = \vec{V}_{I,3/\phi} + \vec{GI} \wedge \vec{\Omega}_{3/\phi} = l\dot{\beta} \vec{z}_b - (Y\dot{\gamma}_3 + Z\dot{\gamma}_3) \wedge (\dot{\theta} \vec{x}_1 + \dot{\psi} \vec{y}_2) \text{ avec } \theta = \dot{\theta} = 0 \text{ il vient :}$$

$$\vec{V}_{G,3/\phi} = l\dot{\beta} \vec{z}_b + Z\dot{\psi} \vec{x}_3 = (Z\dot{\psi} - l\dot{\beta} \cos\beta \sin\psi) \vec{x}_3 - l\dot{\beta} \sin\beta \dot{\gamma}_3 + l\dot{\beta} \cos\beta \cos\psi \vec{z}_3$$

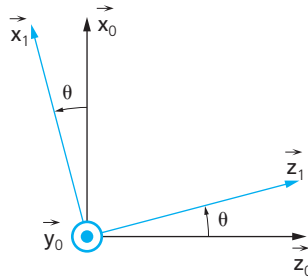
$$5. \vec{a}_{G,3/\phi} = \frac{d}{dt} [l\dot{\beta} \vec{z}_b + Z\dot{\psi} \vec{x}_3]_{R_0}$$

$$= l\ddot{\beta} \vec{z}_b + l\dot{\beta} \cdot \dot{\beta} \vec{x}_0 \wedge \vec{z}_b + lZ\ddot{\psi} \vec{x}_3 + Z\dot{\psi}(\dot{\theta} \vec{x}_1 + \dot{\psi} \vec{y}_1) \wedge \vec{x}_3$$

$$= l\ddot{\beta} \vec{z}_b - l\dot{\beta}^2 \vec{y}_b + Z\ddot{\psi} \vec{x}_3 - Z\dot{\psi}^2 \vec{z}_3$$

$$= \ddot{\psi} Z - l \sin\beta (\ddot{\beta} \cos\beta - \dot{\beta}^2 \sin\beta) \vec{x}_3 - l (\ddot{\beta} \sin\beta + \dot{\beta}^2 \cos\beta) \vec{y}_3 + [l \cos\psi (\ddot{\beta} \cos\beta - \dot{\beta}^2 \sin\beta) - \dot{\psi}^2 Z] \vec{z}_3$$

C11 • 1. Un cercle de rayon $R \sin \theta$.



$$2. \vec{V}_{P \in S_3/R_0} = \vec{V}_{C \in S_3/R_0} + \overrightarrow{PC} \wedge \dot{\phi} \vec{z}_1 = -R\dot{\phi} \sin \theta \vec{y}_1.$$

$$3. \dot{\phi} = \frac{1}{\sin 30} \times \frac{1}{60} = \frac{1}{30} \text{ rad/s.}$$

$$4. \vec{V}_{P \in \text{torche}/R_0} = \frac{d}{dt}[(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP})]_{R_0} = k \left[\frac{d\vec{z}_1}{dt} \right]_{R_0} = h\dot{\theta} \vec{x}_1 = h\dot{\theta} \cos \theta \vec{x}_0 - h\dot{\theta} \sin \theta \vec{y}_0.$$

5. Pour lever l'ambiguïté du paramétrage du point coïncident, le mieux est de passer par un autre point du solide.

$$\vec{V}_{P \in S_3/R_0} = \vec{V}_{C \in S_3/R_0} + \overrightarrow{PC} \wedge \vec{\Omega}_{S_3/R_0} = h\dot{\theta} \vec{x}_1 - R\vec{z}_0 \wedge \dot{\theta} \vec{y}_1 = h\dot{\theta} \vec{x}_1 + R\dot{\theta} \vec{x}_0.$$

$$6. \vec{V}_{P \in \text{torche}/S_3} = \vec{V}_{P \in \text{torche}/R_0} - \vec{V}_{P \in S_3/R_0} = -R\dot{\theta} \vec{x}_0.$$

$$7. \dot{\theta}_C = \frac{1}{60} \text{ rd/s.}$$

C12 • Le mouvement de ③ étant une rotation d'axe H_3 , on connaît la direction de $\vec{V}_{I \in 3/0} = \vec{V}_{I \in 4/0}$ perpendiculaire à IH , de même $\vec{V}_{E \in 3/0} = \vec{V}_{E \in 2/0}$ est perpendiculaire à HE .

$\vec{V}_{D \in 2/0} = \vec{V}_{D \in 1/0}$ est perpendiculaire à CD .

– On passe de $\vec{V}_{M \in 5/0} = \vec{V}_{M \in 4/0}$ à $\vec{V}_{I \in 4/0} = \vec{V}_{I \in 3/0}$ par équiprojectivité sur MI ;

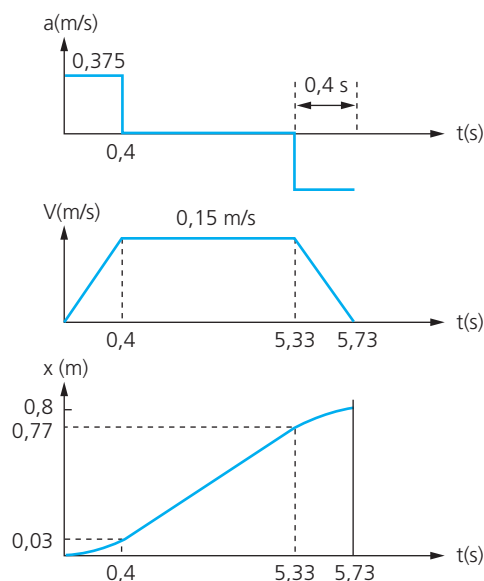
– on passe de $\vec{V}_{E \in 3/0}$ à $\vec{V}_{I \in 3/0}$ par équiprojectivité sur IE ;

– on passe de $\vec{V}_{E \in 2/0}$ à $\vec{V}_{D \in 2/0} = \vec{V}_{D \in 1/0}$ par équiprojectivité sur ED , on trouve :

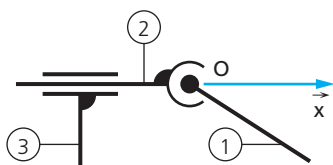
$$|\vec{V}_{D \in 1/0}| = 340 \text{ mm/s} \quad \text{d'où a} \quad |\omega_{1/0}| = 0,032 \text{ rad/s}.$$

$$\textbf{C13} \bullet 1. \omega = \frac{V}{\rho_v} \cdot 2\pi$$

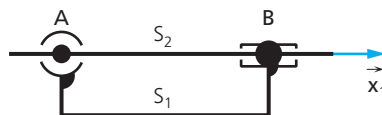
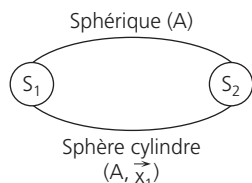
2.



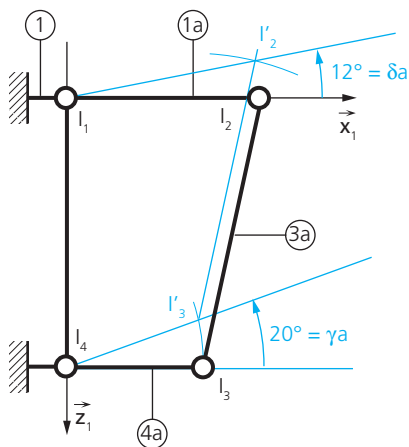
C14 • 1.

2. Liaison 1/3 = sphère cylindre 0, \vec{x} .

C15 • 1.

2. La liaison globale équivalente est une liaison pivot d'axe (A, \vec{x}_1).

C16 •

Graphiquement, on dessine le mécanisme pour $\gamma_a = 20^\circ$ (par exemple).On mesure $\delta a = 12^\circ$ d'où $K_a = \frac{12}{20} = 0,6$.Analytiquement, on écrit la fermeture de la boucle géométrique et on projette la relation vectorielle sur \vec{z}_1 :

- $l_1 \sin \delta a + l_3 \sin(\beta_0 + \Delta\beta) + l_4 \sin \gamma a - l_0 = 0$; en linéarisant pour δa et γa petits ;
- $l_1 \delta a + l_3 \sin(\beta_0 + \Delta\beta) + l_4 \gamma a - l_0 = 0$.

La construction géométrique montre que $\Delta\beta \approx 0$ (le mouvement de 3a est sensiblement un mouvement de translation dans le domaine considéré). Par ailleurs, pour $\gamma a = \delta a = 0$ on a $l_3 \sin \beta_0 - l_0 = 0$ $\Rightarrow l_4 \gamma a - l_1 \delta a = 0 \Rightarrow K_a = \frac{l_4}{l_1} = \frac{2}{3}$ (les déplacements suivant \vec{z} de I_3 et I_2 sont sensiblement identiques).C17 • 1. $\vec{\Omega}_{3/1} = \vec{\Omega}_{3/2} + \vec{\Omega}_{2/1} \Rightarrow \omega_{3/1} \cdot \vec{\Omega} = \dot{\varphi} \vec{n}_2 + \dot{\theta} \vec{x}_1$.2. $\omega_{3/1} = -2 \dot{\theta} \sin \frac{\alpha}{2}$.3. $\dot{\varphi} = -\dot{\theta}$.

$$\mathbf{C18} \bullet \{\tau_P\} = \begin{Bmatrix} -1\,905 \vec{x} + 12\,390 \vec{y} - 16\,040 \vec{z} \\ 0 \end{Bmatrix}_P \quad \{\tau_M\} = \begin{Bmatrix} 1\,905 \vec{x} - 9\,179 \vec{y} + 9\,686,5 \vec{z} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{\tau_N\} = \begin{Bmatrix} -3\,211 \vec{y} + 6\,353,5 \vec{z} \\ 0 \end{Bmatrix}_N$$

$$\mathbf{C19} \bullet 1. \quad \{\mathcal{F}_{25}\} = \begin{Bmatrix} X_{25} & L_{25} \\ Y_{25} & M_{25} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(N_5, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)} ; \quad \{\mathcal{F}_{45}\} = \begin{Bmatrix} X_{45} & L_{45} \\ Y_{45} & M_{45} \\ Z_{45} & N_{45} \end{Bmatrix}_{(O_5, \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_5)} \quad N_{45} = p_4 \quad Z_{45} ; \quad p_4 \text{ en m/rd}$$

$$\{\mathcal{F}_{24}\} = \begin{Bmatrix} X_{24} & L_{24} \\ Y_{24} & M_{24} \\ Z_{24} & 0 \end{Bmatrix}_{(O_4, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}$$

2. Équilibre de ⑤

$$X_{25} + X_{45} = 0$$

$$Y_{25} + Y_{45} = 0$$

$$Z_{45} - F = 0$$

$$L_{25} + L_{45} - F.c = 0$$

$$M_{25} + M_{45} + F.b = 0$$

$$N_{45} + a_5 Y_{25} = 0$$

Équilibre de ④

$$-X_{45} + X_{24} = 0$$

$$-Y_{45} + Y_{24} = 0$$

$$-Z_{45} + Z_{24} = 0$$

$$-L_{45} + L_{24} + \lambda Y_{24} = 0$$

$$-M_{45} + M_{24} - \lambda X_{24} = 0$$

$$-N_{45} + C = 0$$

4. Trois inconnues sont surabondantes ; on peut choisir de faire $X_{25} = L_{25} = 0$ $M_{25} = 0$.

C20 • On étudie une évolution depuis la position d'équilibre, ce qui revient à traiter le problème en ne considérant que \vec{F} , \vec{P} , et en ne tenant pas compte des poids des pièces (équilibrés par \vec{F}_0).

– Isoler successivement les biellettes ②, ④, ⑥, ⑦ soumises à des actions mécaniques modélisables par deux glisseurs pour déterminer la direction des résultantes en K, H, G, E, D.

– Isoler ⑤ ; en déduire la direction de la résultante de l'action mécanique en A (⑤ est soumis à trois glisseurs).

– Isoler ① ; l'équation de la résultante projetée sur \vec{y} permet d'écrire $P = E$ avec $\vec{R}_{2 \rightarrow 1} = E\vec{y}$.

– Isoler ③ ; l'équation des moments en B permet d'écrire $P = \frac{Fa}{b}$.