THÈME 1

NUMÉRATION ET ENTIERS NATURELS

Exercice 1.

Vrai ou faux ?

a. 7 est un chiffre.

b. 77 est un nombre.

c. Dans 1 707, il y a 7 centaines, 17 centaines, 7 unités, 70 dizaines.

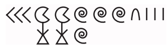
d. « Décimal » signifie « à virgule ».

e. Le système horaire est décimal.

Exercice 2.

Voici des nombres écrits dans différents systèmes de numération et leur transcription dans le système actuel :

Système égyptien (– 3000)

 532	 2 160	 32 413

Système babylonien (– 1800)

 2	 44	 85	 11 327

Système romain (– 100)

LVI	CCIX	DLV	MXXVIII
56	209	555	1 028

Système maya (– 400 à + 900, Amérique centrale)

 12	 20	 100	 249

Système binaire (ordinateur)

10	11	1 100	11 0111
2	3	12	55

a. Écrire, dans chacun de ces systèmes, les nombres 36, 79 et 324.

b. Indiquer pour chacun de ces systèmes de numération :
– la base utilisée (le nombre d'unités dans un groupement) ;
– si la valeur d'un signe change selon sa position dans le nombre ;
– l'existence, ou non, d'un signe pour désigner l'absence d'unité à un rang donné (un « zéro ») ;
– les opérations utilisées pour déterminer la valeur du nombre.

Exercice 3.

Combien y a-t-il de nombres entiers strictement compris entre 324 et 645 ?

Exercice 4.

On numérote les 287 pages d'un livre (à partir de 1).
Combien a-t-on écrit de caractères ?

Exercice 5.

1. Calculer les deux derniers chiffres de 7^2, 7^3, 7^4, 7^5, 7^6 et de 7^7.

2. Trouver les deux derniers chiffres des nombres 7^{10}, 7^{48}, 7^{102} et $7^{2\,011}$.
(aucune démonstration n'est exigée, indiquer simplement votre méthode)

Exercice 6.

1. Écrire $(1032)_{\text{quatre}}$ en base dix.

2. Écrire 2 014 en base cinq.

Exercice 7.

1. Trouver tous les nombres entiers compris entre 100 et 1 000 qui s'écrivent avec les chiffres 2, 5, 8 et dont les 3 chiffres sont différents. On s'attachera à présenter cette recherche de façon simple, claire et systématique.

2. On note S la somme de tous les nombres ainsi obtenus et $t = 2 + 5 + 8$. Montrer, sans calculer la somme S, que $S = t \times 222$.

3. Sans rechercher les nombres entiers compris entre 100 et 1 000 qui s'écrivent avec les chiffres 4, 7, 9 et dont les 3 chiffres sont différents, trouver leur somme.

Exercice 8.

1. Déterminer toutes les décompositions additives du nombre 33, en utilisant seulement les nombres 3, 5 et 7 sans nécessairement les utiliser tous (à titre d'exemple, on peut écrire 33 = 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 3). On présentera clairement la méthode choisie pour déterminer ces décompositions.

2. Au rugby, les équipes marquent des points lors de quatre phases de jeu :
– en réussissant un coup de pied de pénalité pour 3 points ;
– en réussissant un drop pour 3 points ;
– en marquant un essai non transformé pour 5 points ;
– en marquant un essai transformé pour 7 points.

a. Yanis affirme que son équipe a marqué 33 points grâce à deux essais et plusieurs pénalités. Est-ce possible ? Justifier.

b. Paul affirme que son équipe a marqué 27 points grâce à deux essais, et en réussissant autant de drops que de pénalités. Est-ce possible ? Justifier.

c. Une équipe a marqué 20 points. Sachant qu'aucun drop n'a été réussi, trouver toutes les manières dont ces 20 points ont pu être obtenus.

Exercice 9.

1. Existe-t-il une base n dans laquelle on a l'égalité :

$$\overline{323} = (\overline{12} \times \overline{21}) + \overline{11} \ ?$$

2. Existe-t-il une base p dans laquelle on a l'égalité :

$$\overline{14} \times \overline{23} = \overline{234}$$

THÈME 1

CORRIGÉS

Exercice 1.

a. Selon le contexte, 7 peut désigner soit un chiffre, soit un nombre. Dans le nombre 1 075, « 7 » est le chiffre des dizaines ; dans la phrase « il y a 7 fenêtres dans la pièce », 7 est un nombre (à un seul chiffre). Un nombre répond à la question « combien ? ».

b. Vrai : 77 est un nombre qui s'écrit avec 2 chiffres.

c. Dans 1 707, il y a :

– 7 centaines : faux (1 707 peut s'écrire $17 \times 100 + 7$; il y a donc 17 centaines ou « paquets de 100 » dans 1 707) ;

– 17 centaines : vrai.

– 7 unités : faux ($1\,707 = 1\,707 \times 1$; il y a 1 707 unités) ;

– 70 dizaines : faux ($1\,707 = 170 \times 10 + 7$; il y a donc 170 dizaines).

d. Faux : « décimal » vient du latin *decem* qui signifie dix.

e. Le système horaire est en base soixante ($1\text{ h} = 60\text{ min} = 60 \times 60\text{ s}$). Cependant, quand on dit « le record du 100 m est 9,77 s », on utilise le système décimal.

Exercice 2.

a. Tableau des réponses.

	36	79	324
Égyptien			
Babylonien			
Romain	XXXVI	LXXIX	CCCXXIV
Maya			
Binaire	100100	1001111	101000100

b.

	Base (groupements)	Valeur variable des signes selon leur position	Existence d'un « zéro »	Opérations associées
Égyptien	dix	non	non	+
Babylonien	dix et soixante	oui	apparu (vers – 250)	+ et ×
Romain	deux et cinq	non	non	+ et –
Maya	vingt	oui	oui	+ et ×
Binaire	deux	oui	oui	+ et ×

Exercice 3.

645 – 324 = 321, il y a donc 320 entiers strictement compris entre 324 et 645.

Exercice 4.

On a écrit 9 caractères pour les pages de 1 à 9,puis 2×90 caractères pour les pages 10 à 99 (il y a (99 – 9) nombres à 2 chiffres de la page 10 à la page 99),puis $3 \times (287 - 99)$ caractères pour les pages 100 à 287.
Donc, au total : 9 + 180 + 564 = 753 caractères.

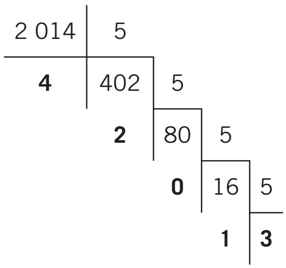
Exercice 5.

1. 7^2 finit par 49, 7^3 par 43, 7^4 par 01, 7^5 par 07, 7^6 par 49, 7^7 par 43 (et 7^1 finit par 07). Les deux chiffres sont cycliquement 07, 49, 43, 01.
2. Il suffit donc de savoir à quelle étape du cycle on se situe.
$10 = 2 \times 4 + 2$ donc 7^{10} finit comme 7^2 c'est-à-dire par 49 (2e nombre de la série). De même, $48 = 11 \times 4 + 4$, donc 7^{48} finit comme 7^4 donc par 01 ; 7^{102} comme 7^2 (par 49) et 7^{2011} comme 7^3 (par 43).

Exercice 6.

1. $(1\,032)_{\text{quatre}} = 1 \times 4^3 + 0 \times 4^2 + 3 \times 4^1 + 2 \times 4^0 = 64 + 12 + 2 = 78$

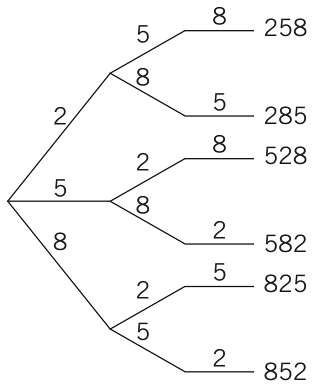
2. Deux méthodes au choix :
– effectuer les divisions successives de 2 006 par 5 :



– utiliser la valeur des « paquets » de 5 : $5^2 = 25$; $5^3 = 125$; $5^4 = 625$; $5^5 = 3\,125$ d'où $2\,014 = 3 \times 5^4 + 1 \times 5^3 + 0 \times 5^2 + 2 \times 5^1 + 4 \times 5^0$
Par conséquent : $2\,014 = (31\,024)_{\text{cinq}}$

Exercice 7.

1. Un arbre permet d'envisager tous les choix possibles pour le premier chiffre, puis pour le second chiffre. Les deux premiers chiffres étant choisis, le troisième est entièrement déterminé.
On obtient ainsi les six nombres suivants :
258 ; 285 ; 528 ; 582 ; 825 ; 852



2. En mettant en facteur les centaines puis les dizaines, on obtient :
$S = (2 + 2 + 5 + 5 + 8 + 8) \times 100 + (2 + 2 + 5 + 5 + 8 + 8) \times 10 + (2 + 2 + 5 + 5 + 8 + 8)$
$S = (2 + 2 + 5 + 5 + 8 + 8) \times (100 + 10 + 1)$
$S = (2 \times (2 + 5 + 8)) \times 111$
$S = (2 + 5 + 8) \times 222$
$S = t \times 222$

3. Le raisonnement précédent s'applique de la même façon si on remplace les chiffres 2, 5 et 8 par les chiffres 4, 7 et 9. La somme cherchée S′ est donc égale à :
$S' = (4 + 7 + 9) \times 222 = 4\,440$.

Exercice 8.

1. On obtient exactement 8 décompositions possibles, c'est-à-dire 8 triplets solutions pour l'équation $3a + 5b + 7c = 33$.
33 = 5 + 7 + 7 + 7 + 7
33 = 3 + 3 + 3 + 3 + 7 + 7 + 7
33 = 3 + 3 + 3 + 5 + 5 + 7 + 7
33 = 3 + 3 + 5 + 5 + 5 + 5 + 7
33 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 5 + 7
33 = 3 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5
33 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 5 + 5 + 5
33 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3

2. a. C'est possible. En analysant les 8 solutions précédentes, on constate que la décomposition 33 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 5 + 7 convient au résultat annoncé par Yanis : 7 pénalités et 2 essais dont un qui a été transformé.
b. C'est impossible, car les trois décompositions du nombre 27 correspondant à deux essais, soit ne donnent pas un nombre entier de drops et de pénalités, soit ne donnent pas un nombre égal de drops et de pénalités :
27 = 5 + 5 + 17
27 = 5 + 7 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3
27 = 7 + 7 + 13

c. Il y a exactement quatre solutions :
$20 = 5 + 5 + 5 + 5$
(4 essais)
$20 = 3 + 5 + 5 + 7$
(1 pénalité, 2 essais, 1 essai transformé)
$20 = 3 + 3 + 7 + 7$
(2 pénalités, 2 essais transformés)
$20 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 5$
(5 pénalités, 1 essai)

Exercice 9.

1. Si l'égalité est vraie alors on a : n est un entier, $n \geq 4$ et $3n^2 + 2n + 3 =$
$(n + 2)(2n + 1) + (n + 1)$
D'où : $3n^2 + 2n + 3 = 2n^2 + 6n + 3$;
$n^2 - 4n = 0$, soit $n(n - 4) = 0$.
Cette équation a pour solution $n = 0$ ou $n = 4$.
Donc l'égalité initiale est vérifiée dans la base 4.

2. Si l'égalité est vraie alors on a : p est un entier, $p \geq 5$ et $(p + 4)(2p + 3) = 2p^2 + 3p + 4$.
D'où : $2p^2 + 11p + 12 = 2p^2 + 3p + 4$;
$8p = -8$. Cette équation a pour solution (-1).
Il n'existe donc pas de base dans laquelle l'égalité proposée est vraie.

ARITHMÉTIQUE

Exercice 1.

a. Pour chacune des affirmations suivantes, dites si elle est vraie ou fausse et justifiez votre réponse.

a. Tout nombre multiple de 3 est multiple de 9.
b. Tout nombre multiple de 5 et de 7 est multiple de 35.
c. Tout nombre divisible par 4 et 6 est divisible par 24.
d. Tout nombre multiple de 12 est divisible par 4.
e. Le produit de deux diviseurs d'un nombre entier est un diviseur de ce nombre.
f. $29 = 4 \times 6 + 5$ signifie que 5 est le reste dans la division euclidienne de 29 par 4.

Exercice 2.

En piste !

Deux cyclistes roulent dans le même sens sur une piste. Le premier (A) fait un tour en 2 min, le deuxième (B) en 1 min 24 s. Sachant qu'ils sont partis ensemble de la ligne de départ, après combien de temps franchiront-ils à nouveau pour la première fois ensemble cette ligne de départ ? Combien de tours de piste chacun d'eux aura-t-il effectué ?

Exercice 3.

On sait que :

$$1\,000\,000 = (1\,996 \times 501) + 4$$
$$100\,000 = (1\,996 \times 50) + 200$$
$$10\,000 = (1\,996 \times 5) + 20$$

En déduire le quotient et le reste de la division euclidienne de 8 640 219 par 1 996.

Exercice 4.

1. a. Déterminer les restes des divisions euclidiennes par 7 de 1, de 10 puis de 100. Écrire les trois égalités caractéristiques correspondantes.
b. En utilisant l'égalité $10^3 = 10 \times 10^2$, montrer que le reste de la division euclidienne de 10^3 par 7 se déduit, sans poser de divisions, des résultats précédents.
c. Soit r_n le reste de la division euclidienne de 10^n par 7 et r_{n+1} le reste de la division euclidienne de 10^{n+1} par 7. Donner une méthode permettant d'obtenir r_{n+1} à partir de r_n.
d. Reproduire et compléter alors le tableau ci-dessous.

10^n	1	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8	10^9
Reste de la division euclidienne de 10^n par 7										

2. Déterminer à l'aide du tableau de la question **1.d.** si le nombre 6 000 000 006 est divisible par 7. Indiquer les étapes de votre raisonnement.

Exercice 5.

Dans cet exercice, a, b et c sont des chiffres compris entre 1 et 9.
On considère des nombres écrits en base dix avec ces chiffres et on note, par exemple, $\overline{bac}$ le nombre dont b est le chiffre des centaines, a celui des dizaines et c celui des unités.
Les questions sont indépendantes.

1. Voici 4 nombres : 7, 13, 57 et 61. Parmi ces nombres, lequel n'est pas un nombre premier ? Justifier.

2. a. Le nombre 3737 est-il un nombre premier ? Justifier.
b. Un nombre de la forme $\overline{abab}$ peut-il être un nombre premier ? Justifier.

3. a. On considère les trois nombres $\overline{abc}$, $\overline{abb}$ et $\overline{acc}$. Montrer que la somme de ces trois nombres est un nombre divisible par 3.

b. On considère les deux nombres $\overline{cba}$ et $\overline{bba}$. Proposer un troisième nombre de trois chiffres, uniquement formé avec des chiffres choisis parmi les chiffres a, b et c, pour que la somme des trois nombres soit divisible par 3. Justifier.

Exercice 6.

1. Écrire 1 001 sous la forme d'un produit de 3 nombres entiers différents de 1.

2. Trouver tous les diviseurs de 1 001. On s'attachera à présenter cette recherche de façon simple, claire et systématique.

3. Soit le nombre 712 712. La division euclidienne de 712 712 par 13 donne un quotient q_1 et un reste r_1. La division euclidienne de q_1 par 11 donne un quotient q_2 et un reste r_2. La division euclidienne de q_2 par 7 donne un quotient q_3 et un reste r_3.
Le dernier quotient obtenu q_3 était-il prévisible ? Les restes r_1, r_2, r_3 étaient-ils prévisibles ?

4. Soit un nombre qui s'écrit sous la forme $\overline{abcabc}$ où a, b et c sont choisis parmi les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9. Quelle(s) condition(s) éventuelle(s) doivent vérifier a, b et c pour que le nombre $\overline{abcabc}$ soit :
un multiple de 7 ? un multiple de 13 ? un multiple de 65 ? un multiple de 14 ? un multiple de 63 ?

5. Sans faire de division, montrer que le nombre 465 549 :
– a même reste que (549 – 465) dans la division euclidienne par 13 ;
– est divisible par 7.

Exercice 7.

1. Peut-on trouver trois nombres entiers naturels consécutifs dont la somme est : 105 ? 210 ? 77 ? 144 ? 326 ? Justifiez vos réponses.

2. Quels sont tous les entiers naturels qui peuvent être la somme de trois entiers consécutifs ? Justifiez votre réponse.

3. Quelles peuvent être les valeurs possibles du nombre a (avec $0 < a < 9$) pour que le nombre $\overline{734a}$ soit la somme de trois entiers naturels consécutifs ?

4. Le nombre 21 924 est le produit de trois entiers consécutifs que l'on souhaite déterminer.

a. Décomposer ce nombre en produit de facteurs premiers, puis en déduire les trois entiers cherchés.

b. À l'aide de votre calculatrice, trouver ces trois nombres par une autre méthode que vous décrirez précisément.

CORRIGÉS

Exercice 1.

Pour prouver qu'une proposition est fausse, il suffit de donner un contre-exemple. En revanche, pour prouver qu'une proposition est (toujours) vraie, il faut la démontrer dans le cas général, ce qui demande souvent d'employer le calcul littéral, la (les) lettre(s) prenant la place de « n'importe quel » nombre.

a. Faux. Contre-exemple : 6 est multiple de 3 ($6 = 3 \times 2$), mais 6 n'est pas multiple de 9 : il n'existe pas d'entier naturel k tel que $6 = 9 \times k$.

b. Vrai. Un nombre multiple de 5 s'écrit $5 \times k$, avec k entier. Pour que $5k$ soit multiple de 7, il faut et il suffit que k soit multiple de 7, c'est-à-dire que $k = 7 \times k'$, avec k' entier.
D'où $5k = 5 \times 7k' = 35k'$ ce qui signifie bien que le nombre $5k$ est multiple de 35.
Cette démonstration repose sur le théorème de Gauss (voir Fiche 9, § 3).

c. Faux. 12 est divisible par 4 et par 6, mais n'est pas divisible par 24.

d. Vrai. Tout multiple de 12 s'écrit $12 \times k$, avec k entier.
Or $12 \times k = 4 \times 3 \times k = 4 \times 3k$. Il s'agit donc bien d'un multiple de 4.

e. Faux. Pour un contre-exemple, se reporter à la question c.

f. Faux. Le reste ne peut-être supérieur au diviseur. $29 = 4 \times 6 + 5$ signifie que 5 est le reste dans la division euclidienne de 29 par 6.

Exercice 2.

Lorsque les deux cyclistes se retrouveront sur la ligne d'arrivée, ils auront mis le même temps à faire un nombre entier de tours (différent pour chacun d'eux). Le tableau suivant permet de déterminer à quel moment cela se

Nombre de tours de piste	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Temps mis par le cycliste A (en secondes)	120	240	360	480	600	720	**840**	960	1 080	1 200
Temps mis par le cycliste B (en secondes)	84	168	202	336	420	504	588	672	756	**840**

Au bout de 840 secondes, soit 14 min, les deux cyclistes franchiront ensemble la ligne d'arrivée. Le cycliste A aura parcouru 7 tours de piste et le cycliste B, 10 tours.
De manière experte, cet exercice relève de la recherche du PPCM de 120 et 84. Après lecture de la Fiche 18, vous pouvez le reprendre avec les données numériques suivantes : 1 minute 45 secondes pour le premier cycliste, 1 minute 36 secondes pour le second.
Réponse : 1er franchissement commun après 56 minutes, le premier cycliste ayant effectué 32 tours et le second 35 tours.

Exercice 3.

8 640 219
$= 8 \times 1\,000\,000 + 6 \times 100\,000$
$\quad + 4 \times 10\,000 + 219$
$= 8 \times [1\,996 \times 501 + 4] + 6 \times [1\,996 \times 50$
$\quad + 200] + 4 \times [1\,996 \times 5 + 20] + 219$
$= 1\,996 \times [8 \times 501 + 6 \times 50 + 4 \times 5]$
$\quad + [8 \times 4 + 6 \times 200 + 4 \times 20 + 219]$
$= 1\,996 \times 4\,328 + 1\,531$ et $1\,531 < 1\,996$

Le quotient de la division euclidienne de 8 640 219 par 1 996 est donc : 4 328 et le reste : 1 531.

Exercice 4.

1. a. Remarque : pour des raisons de commodité d'écriture, nous utilisons dès cette question les notations proposées dans l'énoncé à la question 1.c. et notons également dans la

suite q_n le quotient de la division euclidienne de 10^n par 7.
$1 = 7 \times 0 + 1$ et $1 < 7$ donc $q_0 = 0$ et $r_0 = 1$
$10 = 7 \times 1 + 3$ et $3 < 7$ donc $q_1 = 1$ et $r_1 = 3$
$100 = 7 \times 14 + 2$ et $2 < 7$ donc $q_2 = 14$ et $r_2 = 2$

b. $10^3 = 10 \times 10^2 = (7 \times 1 + 3) \times 7 \times 14 + 2)$
r_3 est donc le reste de la division euclidienne de $3 \times 2 = 6$ par 7 d'où $r_3 = 6$.

c. $10^{n+1} = 10 \times 10^n = (7 \times 1 + 3)(7 \times q_n + r_n) = 7 \times (r_n + 7 \times q_n + 3 \times q_n) + 3 \times r_n$. r_{n+1} est donc le reste de la division euclidienne de $3 \times r_n$ par 7.

d.

10^n	1	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8	10^9
Reste de la division euclidienne de 10^n par 7	1	3	2	6	4	5	1	3	2	6

2. $6\,000\,000\,006 = 6 \times 10^9 + 6 = 6 \times (7 \times q_9 + r_9) + 6 = 7 \times 6 \times q_9 + 6 \times r_9 + 6 = 7 \times 6 \times q_9 + 6 \times 6 + 6 = 7 \times 6 \times q_9 + 7 \times 6 = 7 \times (6 \times q_9 + 6)$.
6 000 000 006 est donc un multiple de 7.

Exercice 5.

1. $57 = 3 \times 19$ et n'est donc pas premier, puisqu'il a plus de deux diviseurs, autrement dit : il a des diviseurs autres que 1 et lui-même.

2. a. $3737 = 37 \times 100 + 37 = 37 \times 101$ et n'est donc pas premier.

b. $\overline{abab} = \overline{ab} \times 100 + \overline{ab} = \overline{ab} \times 101$. Le nombre $\overline{abab}$ a donc deux diviseurs autre que lui-même, à savoir : $\overline{ab}$ et 101.

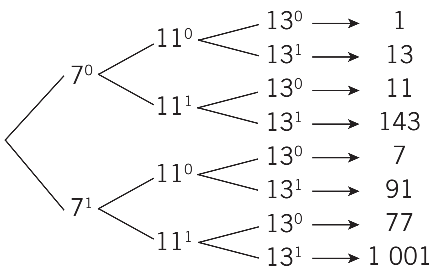
3. a. $\overline{abc} + \overline{abb} + \overline{acc} = a \times 100 + b \times 10 + c + a \times 100 + b \times 10 + b + a \times 100 + c \times 10 + c$
$= a \times 300 + b \times 21 + c \times 12$
$= 3 \times (100a + 7b + 4c)$.
La somme $\overline{abc} + \overline{abb} + \overline{acc}$ est donc divisible par 3.

b. $\overline{cba} + \overline{bba} = 100c + 120b + 2a$. $120b$ est multipe de 3. Il suffit donc d'ajouter à $100c + 2a$ le nombre $\overline{cca}$. En effet, $\overline{cba} + \overline{bba} + \overline{cca} = 210c + 120b + 3a = 3 \times (70c + 40b + a)$ est multiple de 3.

Exercice 6.

1. $1\,001 = 7 \times 11 \times 13$

2. Les diviseurs de 1 001 s'écrivent sous la forme : $7^a \times 11^b \times 13^c$ avec $0 \leq a \leq 1$, $0 \leq b \leq 1$ et $0 \leq c \leq 1$. La recherche peut donc être présentée sous la forme d'un arbre de choix :



Les diviseurs de 1 001 sont donc : 1, 7, 11, 13, 77, 91, 143 et 1 001.
Il est impératif pour le candidat de faire le lien entre les questions 3 à 5 et la question 1.

3. $712\,712 = 712 \times 1\,001 = 712 \times 7 \times 11 \times 13$ d'après la question 1.
On en déduit que $q_3 = 712$ et $r_1 = r_2 = r_3 = 0$ puisque 712 712 est divisible par 7, 11 et 13.

4. $\overline{abcabc} = \overline{abc} \times 1\,001$
$= \overline{abc} \times 7 \times 11 \times 13$.

$\overline{abcabc}$ est donc toujours un multiple de 7 et de 13 (et de 11).

$65 = 5 \times 13$. $\overline{abcabc}$ est multiple de 65 si et seulement si $\overline{abcabc}$ est multiple de 5 et de 13 (d'après la propriété 2 du paragraphe 3.2 de la Fiche 19).

Or $\overline{abcabc}$ est toujours multiple de 13. Il faut et il suffit donc que $\overline{abcabc}$ soit multiple de 5, c'est-à-dire que $c = 0$ ou $c = 5$.

De façon analogue, on voit que $\overline{abcabc}$ est multiple de 14 si et seulement si $\overline{abcabc}$ est multiple de 2, c'est-à-dire $c \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$; et que $\overline{abcabc}$ est multiple de 63 si et seulement si $\overline{abcabc}$ est multiple de 9, c'est-à-dire $2a + 2b + 2c$ multiple de 9 ou encore : $a + b + c$ multiple de 9 (d'après le théorème de Gauss.

5. 5. 465 549 = 465 465 + (549 – 465) = 465 × 1 001 + (549 – 465). Donc 465 549 = 465 × 7 × 11 × 13 + (549 – 465).
Le premier terme est divisible par 13, donc le reste dans la division de 465 549 par 13 provient du reste de la division de (549 – 465) par 13.
D'autre part, le premier terme étant divisible par 7, tout comme le deuxième (car 549 – 465 = 84), leur somme (465 549) est divisible par 7.

Exercice 7.

1. 105 = 34 + 35 +36 ; 210 = 69 + 70 + 71 ; 144 = 47 + 48 + 49 ; 24 + 25 + 26 = 75 et 25 + 26 + 27 = 78 : on ne peut donc pas trouver trois entiers consécutifs dont la somme est 77.
107 + 108 + 109 = 324 et 108 + 109 + 110 = 327 : on ne peut donc pas trouver trois entiers consécutifs dont la somme est 326.

2. Soit n un entier naturel. Son suivant et son précédent s'écrivent donc respectivement $n + 1$ et $n - 1$.
$(n - 1) + n + (n + 1) = 3n$.
Un entier naturel N peut donc s'écrire comme somme de trois entiers naturels consécutifs si et seulement si il existe un entier naturel n tel que : $3n = N$, c'est-à-dire si et seulement si N est divisible par 3.

3. D'après la question précédente, $\overline{734a}$ est la somme de trois entiers naturels consécutifs si et seulement si $\overline{734a}$ est divisible par trois, c'est-à-dire si et seulement si $7 + 3 + 4 + a$ est divisible par 3. D'où $a \in \{1, 4, 7\}$

4. a. $21\,924 = 2^2 \times 3^3 \times 7 \times 29 = 27 \times 28 \times 29$

b. Deux procédures sont possibles :
– une recherche par essais et ajustements :
$20 \times 21 \times 22 = 9\,240 < 21\,924$;
$30 \times 31 \times 32 = 29\,760 > 21\,924$;
$25 \times 26 \times 27 = 17\,550 < 21\,924$; …
– résoudre « l'équation approchée » :
$x^3 = 21\,924$, d'où $x = \sqrt[3]{21\,924} \approx 27{,}99$. On vérifie que $27 \times 28 \times 29 = 21\,924$.

ENSEMBLES DE NOMBRES

Exercice 1.

Reproduire et compléter le tableau ci-dessous en mettant une croix dans les cases auxquelles le nombre appartient.

Le nombre… / appartient à…	$-\frac{6}{2}$	$-\frac{3}{10}$	π	$\frac{32}{8}$	$\sqrt{\frac{100}{25}}$	3,14	$\sqrt{2}$	0,3333 … (infinité de 3)
L'ensemble des entiers naturels ($\mathbb{N}$)								
L'ensemble des entiers relatifs ($\mathbb{Z}$)								
L'ensemble des décimaux relatifs ($\mathbb{D}$)								
L'ensemble des rationnels ($\mathbb{Q}$)								
L'ensemble des réels ($\mathbb{R}$)								

Exercice 2. Vrai ou faux ?

a. $\frac{2}{3} = 0{,}666$; $\frac{2}{3} \approx 0{,}666$; $\frac{2}{3} > 0{,}666$

b. Entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{9}{4}$:

– il y a un nombre fini d'entiers naturels ;
– il y a un nombre fini de décimaux ;
– il y a un nombre fini de décimaux ayant 1 chiffre après la virgule.

c. $\dfrac{2-\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}+\frac{1}{2}}$ est un décimal ; $\dfrac{10^5 \times 10^3}{10^8}$ est un entier naturel.

d. $(-2)^4$ est négatif ; -2^4 est négatif ; 2^3 est négatif ; 10^{-3} est négatif.

e. $\sqrt{2} = 1{,}414\,213\,562$; $\sqrt{5^2} = 5$; $\sqrt{(-2)^2} = 2$; $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Exercice 3.

Soit $a = 1{,}499\,99\ldots$ (suite illimitée de période 9).
Écrire a sous la forme d'une fraction.
Qu'en concluez-vous ?

Exercice 4.

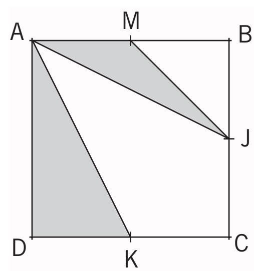
Le nombre $b = \dfrac{3-\frac{1}{4}}{\frac{7}{4}-\frac{2}{3}} \div \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{7}{2}-\frac{2}{5}}$ est-il décimal ?

Exercice 5.

1. Donner l'écriture décimale de $7{,}4 \times 10^4$; $12{,}5 \times 10^{-3}$; $3 \times 10^{-5} \times 2{,}5 \times 10^7$.
$\sqrt{\frac{9}{4}}$; $\sqrt{2}$ et $\frac{10}{3}$.

2. Donner l'écriture scientifique de $2\,011$; $\frac{1}{25}$; 123×10^7 ; $456{,}78 \times 10^{-5}$.

Exercice 6.



THÈME 3

ABCD est un carré dont l'aire est 1 m^2. M, J, K sont les milieux respectifs des segments [AB], [BC] et [CD].

1. Exprimer à l'aide d'une fraction l'aire de la surface blanche.

2. Trouver une fraction équivalente à 5/8 dont la somme des termes est 104.

Exercice 7.

Effectuer et donner la réponse sous la forme la plus simple possible.

$A = 2\sqrt{2} - \sqrt{32} + \sqrt{50}$

$B = 3\sqrt{12} - 4\sqrt{75} - 2\sqrt{27}$

$C = (3\sqrt{7})^2 - 10$

$D = \dfrac{\sqrt{27} + \sqrt{12}}{\sqrt{75}}$

$E = \sqrt{13^2 - 12^2}$

$F = -4 + \sqrt{2}\,(2\sqrt{2} + 1)$

$G = (2\sqrt{5} + 1)^2$

$H = (3\sqrt{2} + 1)(3\sqrt{2} - 1)$

Exercice 8.

1. Comparer $\dfrac{3}{4}$ et $\dfrac{15}{16}$ puis $\dfrac{13}{14}$ et $\dfrac{20}{21}$ et enfin $\dfrac{6}{7}$ et $\dfrac{17}{18}$.

2. Quelle hypothèse peut-on émettre ? Est-elle toujours vraie ?

3. Ranger dans l'ordre croissant les rationnels : $\dfrac{125}{126}$; $\dfrac{5}{6}$; $\dfrac{80}{79}$; $\dfrac{18}{19}$ et $\dfrac{29}{30}$.

Exercice 9.

1. Donner, sans poser d'opération, une valeur approchée à 10^{-2} près de $3{,}02^2$.

2. Encadrer π par deux entiers consécutifs.

3. Donner les valeurs approchées, par défaut et par excès, à 10^{-3} près, de π.

4. Donner l'arrondi de π au millième.

5. Donner la troncature de $\dfrac{22}{7}$ au centième.

CORRIGÉS

Exercice 1.

Le nombre… / appartient à…	$-\frac{6}{2}$	$-\frac{3}{10}$	π	$\frac{32}{8}$	$\sqrt{\frac{100}{25}}$	3,14	$\sqrt{2}$	0,3333 … (infinité de 3)
L'ensemble des entiers naturels ($\mathbb{N}$)				✗	✗			
L'ensemble des entiers relatifs ($\mathbb{Z}$)	✗			✗	✗			
L'ensemble des décimaux relatifs ($\mathbb{D}$)	✗	✗		✗	✗	✗		
L'ensemble des rationnels ($\mathbb{Q}$)	✗	✗		✗	✗	✗		✗
L'ensemble des réels ($\mathbb{R}$)	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗

Pour déterminer la nature d'un nombre, il faut, tout d'abord, l'écrire sous la forme la plus simple possible. Ainsi, $-\frac{6}{2} = -3$; $\frac{32}{8} = 4$; $\sqrt{\frac{100}{25}} = \sqrt{4} = 2$.

Exercice 2.

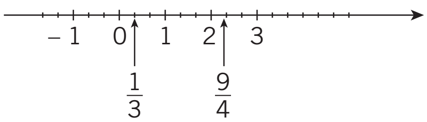
a. $\frac{2}{3} = 0{,}666$? Faux : la partie décimale comporte une infinité de 6.

$\frac{2}{3} \approx 0{,}666$? Vrai : le signe « ≈ » signifiant « environ égal à … ».

$\frac{2}{3} > 0{,}666$? Vrai.

b. On peut utiliser les écritures à virgule :

$\frac{1}{3} \approx 0{,}333$ et $\frac{9}{4} = 2{,}25$ et/ou placer ces nombres sur une droite graduée.



Entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{9}{4}$:

– il y a un nombre fini d'entiers naturels : vrai : 1 et 2 ;

– il y a un nombre fini de décimaux : faux : il y en a une infinité, en voici quelques uns : 0,34 ; 0,341 ; 0,3411, 0,35 ; 0,4 ; 0,416 ; 0,5 ; 1,7486 ;

– il y a un nombre fini de décimaux ayant 1 chiffre après la virgule : vrai : les nombres qui conviennent : 0,4 ; 0,5 ; 0,6 ; 0,7 ; … ; 2,1 ; 2,2.

c. $$\frac{2-\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{10}{5}-\frac{1}{5}}{\frac{4}{10}+\frac{5}{10}} = \frac{\frac{9}{5}}{\frac{9}{10}} = \frac{9}{5} \div \frac{9}{10}$$

$$= \frac{9}{5} \times \frac{10}{9} = \frac{10}{5} = 2$$

(vrai : 2 est un entier donc aussi un décimal).

$\frac{10^5 \times 10^3}{10^8} = \frac{10^8}{10^8} = 1$ (Vrai).

d. $(-2)^4$ est négatif ? Faux :

$(-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = 16$ (positif).

-2^4 est négatif ? Vrai : $-2^4 = -2 \times 2 \times 2 \times 2 = -16$ (l'exposant ne concerne que le 2).

2^3 est négatif ? Faux : $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$

10^{-3} est négatif ? Faux : 10^{-3} est l'inverse de 10^3, soit 1/1 000 qui s'écrit 0,001.

e. $\sqrt{2} = 1{,}414\,213\,562$?
Faux : 1,414 213 562 n'est qu'une approximation de $\sqrt{2}$, celle qu'affichent les calculatrices ; $\sqrt{2}$ est un irrationnel et son écriture à virgule est illimitée et non périodique.

$\sqrt{5^2} = 5$? Vrai

$\sqrt{(-2)^2} = 2$? Vrai : $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$

$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$? Faux : un contre-exemple suffit à le prouver.
Prenons, respectivement, pour *a* et *b*, les nombres 25 et 16.

$\sqrt{25+16} = \sqrt{41}$ et $\sqrt{25} + \sqrt{16}$

$= 5 + 4 = 9 = \sqrt{81}$ $(41 \neq 81)$.

Exercice 3.

$100a = 149{,}999\ldots$
$10a = 14{,}999\ldots$
$100a - 10a = 149{,}999\ldots - 14{,}999\ldots = 135$
d'où $90a = 135$

et $a = \dfrac{135}{90} = \dfrac{3 \times 9 \times 5}{9 \times 10} = \dfrac{15}{10} = 1{,}5.$

On conclut : $1{,}499\,9\ldots = 1{,}5$.
Une écriture décimale illimitée de période 9 désigne un décimal. Cela s'explique par le fait que l'on peut rendre la différence $(1{,}5 - 1{,}499\ldots)$ aussi proche de 0 que l'on veut.
Ce cas de la période 9 est un cas particulier (*cf.* Fiche 24 §2.3).

Exercice 4.

$$b = \frac{3 - \frac{1}{4}}{\frac{7}{4} - \frac{2}{3}} \div \frac{\frac{1}{3}}{\frac{7}{2} - \frac{2}{5}} = \frac{\frac{12-1}{4}}{\frac{21-8}{12}} \div \frac{\frac{1}{3}}{\frac{35-4}{10}}$$

$$= \left(\frac{11}{4} \times \frac{12}{13}\right) \div \left(\frac{1}{3} \times \frac{10}{31}\right)$$

$$= \frac{11 \times 3}{13} \times \frac{3 \times 31}{10} = \frac{3^2 \times 11 \times 31}{2 \times 5 \times 13}$$

b n'est pas un décimal car le dénominateur de la fraction irréductible ne s'écrit pas comme un produit de puissances de 2 et de 5 (facteur 13).

Exercice 5.

1. $7{,}4 \times 10^4 = 74\,000$; $12{,}5 \times 10^{-3} = 0{,}012\,5$; $3 \times 10^{-5} \times 2{,}5 \times 10^7 = 750$.

$\sqrt{\dfrac{9}{4}} = \dfrac{3}{2} = 1{,}5$; $\sqrt{2} \approx 1{,}414$ et $\dfrac{10}{3} \approx 3{,}333$

(écritures décimales approchées).

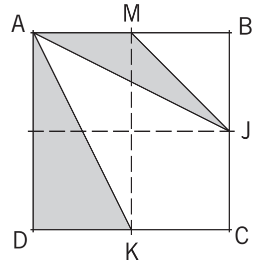
2. $2\,011 = 2{,}011 \times 10^3$;

$\dfrac{1}{25} = 4 \times 10^{-2}$; $123 \times 10^7 = 1{,}23 \times 10^9$;

$456{,}78 \times 10^{-5} = 4{,}567\,8 \times 10^{-3}$.

Exercice 6.

1. L'aire A_B de la surface blanche est égale à l'aire du carré ABCD diminuée de l'aire A_G de la surface grisée.



$A_G = A_{(ADK)} + A_{(AMJ)} = A_{(ADK)} + (A_{(ABJ)} - A_{(MBJ)})$

$= \dfrac{1}{4} A_{(ABCD)} + \dfrac{1}{4} A_{(ABCD)} - \dfrac{1}{8} A_{(ABCD)}$

$= \dfrac{3}{8} A_{(ABCD)}$.

D'où : $A_B = A_{(ABCD)} - A_G$

$= \dfrac{8}{8} A_{(ABCD)} - \dfrac{3}{8} A_{(ABCD)} = \dfrac{5}{8} A_{(ABCD)} = \dfrac{5}{8}$.

2. Les fractions équivalentes à $\dfrac{5}{8}$ s'écrivent $\dfrac{5k}{8k}$ avec *k* entier relatif.
On a $5k + 8k = 104$, d'où $13k = 104$ et $k = 8$.
La fraction solution est donc : $\dfrac{40}{64}$.

Exercice 7.

$A = 2\sqrt{2} - \sqrt{32} + \sqrt{50}$

$\quad = 2\sqrt{2} - \sqrt{16 \times 2} + \sqrt{25 \times 2}$

$\quad = 2\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

$B = 3\sqrt{12} - 4\sqrt{75} - 2\sqrt{27}$

$\quad = 6\sqrt{3} - 20\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = -20\sqrt{3}$

$C = (3\sqrt{7})^2 - 10 = 9 \times 7 - 10 = 53$

$D = \dfrac{\sqrt{27} + \sqrt{12}}{\sqrt{75}} = \dfrac{3\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{5\sqrt{3}} = 1$

$E = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{(13+12)(13-12)}$

$\quad = \sqrt{25} = 5$

$F = -4 + \sqrt{2}\,(2\sqrt{2} + 1)$

$= -4 + 2 \times 2 + \sqrt{2} = \sqrt{2}$

$G = (2\sqrt{5} + 1)^2$

$= (2\sqrt{5})^2 + 2 \times 2\sqrt{5} \times 1 + 1^2$

$= 20 + 4\sqrt{5} + 1 = 21 + 4\sqrt{5}$

$H = (3\sqrt{2} + 1)((3\sqrt{2} - 1) = (3\sqrt{2})^2 - 1^2$

$= 9 \times 2 - 1 = 17$

Exercice 8.

Pour comparer ces fractions, plusieurs méthodes sont possibles :

– réduire les fractions au même dénominateur (cas traité ci-dessous) ;

– rechercher une valeur approchée (poser les divisions) ;

– décomposer chaque fraction en utilisant l'unité (par exemple : $\frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4}$; $\frac{15}{16} = 1 - \frac{1}{16}$; $\frac{1}{4} > \frac{1}{16}$ d'où $\frac{3}{4} < \frac{15}{16}$).

$\frac{3}{4} = \frac{12}{16}$ d'où $\frac{3}{4} < \frac{15}{16}$; $\frac{13}{14} = \frac{39}{42}$

et $\frac{20}{21} = \frac{40}{42}$, d'où $\frac{13}{14} < \frac{20}{21}$; $\frac{6}{7} = \frac{108}{126}$

et $\frac{17}{18} = \frac{119}{126}$, d'où $\frac{6}{7} < \frac{17}{18}$

1. Il semble que, pour n et p entiers naturels tels que $n < p$, $\frac{n}{n+1} < \frac{p}{p+1}$.

Pour comparer les nombres $\frac{n}{n+1}$ et $\frac{p}{p+1}$, cherchons le signe de leur différence.

$$\frac{n}{n+1} - \frac{p}{p+1} = \frac{n(p+1) - p(n+1)}{(n+1)(p+1)} = \frac{n-p}{(n+1)(p+1)}.$$

$n - p$ est négatif (car $n < p$), $(n+1)(p+1)$ est positif (produit de deux positifs), donc le quotient est négatif. Il s'ensuit $\frac{n}{n+1} < \frac{p}{p+1}$ et la propriété est toujours vraie pour n et p entiers naturels tels que $n < p$.

2. Pour ranger les rationnels, on utilise la propriété démontrée :

$\frac{5}{6} < \frac{18}{19} < \frac{29}{30} < \frac{125}{126} < \frac{80}{79}$ ($\frac{80}{79}$ n'est pas une fraction de type $\frac{n}{n+1}$, $\frac{80}{79} > 1$).

Exercice 9.

1. $3{,}02^2 = \left(3 + \frac{2}{100}\right)^2$

$= 9 + \frac{12}{100} + \frac{4}{10\,000} \approx 9{,}12$

2. Encadrement de π par deux entiers consécutifs : $3 < \pi < 4$

3. En utilisant la touche π, la calculatrice affiche : 3,141 592 654, d'où :

– valeur approchée de π par défaut à 10^{-3} près : 3,141 ;

– valeur approchée de π par excès à 10^{-3} près : 3,142.

4. L'arrondi de π au millième : 3,142 (le 4^{e} chiffre de la partie décimale est 5).

5. La troncature de $\frac{22}{7}$ au centième : 3,14 (la calculatrice affiche : 3,142 8… ; 22/7 est une approximation de π).

3 THÈME

ALGÈBRE

Exercice 1.

Vrai ou faux ?
Pour chacune des affirmations suivantes, dites si elle est vraie ou fausse et justifiez.

a. Pour tout nombre x, le nombre $x - 1$ est plus petit que x.

b. On peut trouver un nombre x tel que $x - \frac{1}{2} = x$.

c. Pour tout nombre x, le nombre $-x - 3$ est plus petit que zéro.

d. On peut trouver un nombre x tel que $-x - 3$ soit égal à zéro.

e. On peut trouver un nombre x tel que $\frac{3x}{4} - \frac{2x-1}{2} + \frac{3+2x}{8}$ soit égal à zéro.

f. Pour tout nombre x, $\frac{3x}{4} - \frac{2x-1}{2} + \frac{3+2x}{8}$ est plus grand que zéro.

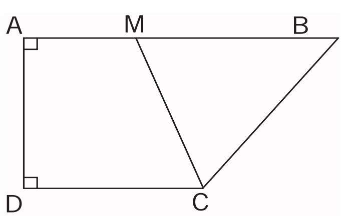
Exercice 2.

Résoudre par une méthode de votre choix le système suivant :

$$(S)\begin{cases} y = 2x - 2 \\ x + 2y = 11 \end{cases}$$

Exercice 3.

Soit la figure ci-dessous
AB = 7 cm, AD = 4 cm et DC = 4 cm. On pose AM = *x* cm.
Déterminer la position du point M pour que les aires du trapèze AMCD et du triangle MBC soient égales. Quelle est cette aire ?



Exercice 4.

Pleins pots. (d'après un exercice de *Maths sans frontières*)

Julie prépare avec son père de la gelée de framboises. Ils obtiennent 8,4 kg de gelée et remplissent 20 pots de 3 tailles différentes. Julie range les pots sur trois étagères, comme l'indique le dessin ci-après, de telle sorte que chaque étagère supporte le même poids. Déterminez la masse de chaque sorte de pot rempli.
a. En utilisant une méthode algébrique.
b. En utilisant un raisonnement arithmétique.

Étagère du haut : 1 petit (à gauche), 2 moyens, 1 gros – étagère du milieu : 4 moyens, 2 petits – étagère du bas : 8 petits et 2 moyens.

Exercice 5.

Dans son porte-monnaie, Nathan a moins de 10 pièces, toutes de 50 cents ou 2 €. Je sais qu'il a au moins 12 euros. Combien de pièces de chaque sorte peut-il avoir ?

1. Proposer une solution à l'exercice ci-dessus.

2. À l'aide d'une résolution graphique, trouvez toutes les solutions au problème.

Exercice 6.

Si on augmente de 6 cm les côtés d'un carré, on obtient un autre carré dont l'aire vaut 9 fois celle du carré initial. Quel est le côté du carré ?

CORRIGÉS

Exercice 1.

a. Vrai. $-1 < 0$, donc $-1 + x < 0 + x$ c'est-à-dire : $x - 1 < x$.

b. Faux. Cette équation est équivalente à $-\frac{1}{2} = 0$. (soustraction de x aux deux membres de l'égalité). Cette dernière égalité est toujours fausse, donc l'équation initiale n'a pas de solution.

c. Faux. Pour $x = -5$, $-x - 3 = 5 - 3 = 2 > 0$.

d. Vrai. Pour $x = -3$, $-x - 3 = -(-3) - 3 = 3 - 3 = 0$.

e. Faux. $\frac{3x}{4} - \frac{2x-1}{2} + \frac{3+2x}{8}$

$= \frac{6x}{8} - \frac{4(2x-1)}{8} + \frac{3+2x}{8}$

$= \frac{6x - 8x + 4 + 3 + 2x}{8} = \frac{7}{8}$.

Or $\frac{7}{8} \neq 0$.

f. Vrai. Voir question précédente.

Exercice 2.

Vous avez le choix entre les trois méthodes suivantes :

a) Par substitution :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 2 \\ x + 2(2x - 2) = 11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 2 \\ 5x - 4 = 11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{15}{5} = 3 \\ y = 2 \times 3 - 2 = 4 \end{cases}.$$

La solution du système (S) est (3 ; 4).

b) Par combinaison :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 2 \\ x + 2y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 4 \\ x + 2y = 11 \end{cases}$$

On a multiplié la 1re ligne par 2 et conservé la 2e ligne.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 15 \\ x + 2y = 11 \end{cases}$$

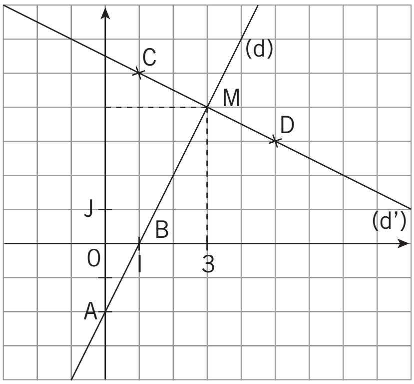
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ 3 + 2y = 11 \end{cases}$$

On a remplacé la 1re ligne par la somme, terme à terme, des deux lignes et conservé la 2e ligne.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = (11 - 3) \div 2 = 4 \end{cases}$$

La solution de (S) est (3 ; 4).

c) Par lecture graphique : considérons que le plan est muni d'un repère (O, I, J) et soit (d) la droite d'équation $y = 2x - 2$; (d) passe par A(0 ; – 2) et B(1 ; 0). Soit (d′) la droite d'équation $x + 2y = 11$; (d′) passe par les points C(1 ; 5) et D(5 ; 3). On trace (d) et (d′) et on lit les coordonnées de leur point d'intersection M(3 ; 4), d'où la solution du système (S).



Exercice 3.

Le lecteur se référera à la Fiche 41 pour la formule de calcul d'aire du trapèze et à la Fiche sur les techniques de résolution d'une équation.

On exprime l'aire du trapèze AMCD et du triangle MBC en fonction de x.

$A_{AMCD} = \frac{(AM + DC) \times AD}{2} = \frac{(x+4) \times 4}{2}$

$= 2x + 8$

$A_{MBC} = A_{ABCD} - A_{AMCD} = \frac{(7+4) \times 4}{2} - (2x + 8)$

$= 22 - (2x + 8) = 14 - 2x$

$A_{MBC} = A_{AMCD} \Leftrightarrow 2x + 8 = 14 - 2x \Leftrightarrow 4x + 8 = 14 \Leftrightarrow x = \dfrac{6}{4} = 1{,}5$ cm.

L'aire du triangle MBC est alors :
$A_{MBC} = 14 - 2 \times 1{,}5 = 11$ cm^2, et on vérifie :
$A_{AMCD} = 2 \times 1{,}5 + 8 = 11$ cm^2.
On peut aussi observer que les aires du trapèze AMCD et du triangle MBC sont égales si et seulement si l'une d'entre elle est égale à la moitié de l'aire du « grand » trapèze ABCD et résoudre l'équation : $A_{AMCD} = 11$ (ou $A_{MBC} = 11$).

Exercice 4.

a. *Solution algébrique*. La masse totale de gelée étant 8,4 kg et chaque étagère supportant le même poids, on en conclut qu'il y a $8{,}4 \div 3 = 2{,}8$ kg de gelée sur chaque étagère.
Appelons x la masse d'un petit pot, y la masse d'un pot moyen et z la masse d'un grand pot. L'observation de l'illustration permet d'écrire les égalités suivantes :
$x + 2y + z = 2{,}8$ (1re étagère) ; $2x + 4y = 2{,}8$ (2^e étagère) et $8x + 2y = 2{,}8$ (3^e étagère).
Il s'agit donc de résoudre le système (S) suivant :

$$(S)\begin{cases} x + 2y + z = 2{,}8 \\ 2x + 4y = 2{,}8 \\ 8x + 2y = 2{,}8 \end{cases}$$

$$(S)\begin{cases} x + 2y + z = 2{,}8 \\ 2x + 2(2y) = 2{,}8 \\ 8x + 2y = 2{,}8 \end{cases}$$

Le terme « $2y$ » étant commun aux trois équations, on procède par substitution :

$$(S)\begin{cases} x + 2y + z = 2{,}8 \\ 2x + 2(2y) = 2{,}8 \\ 2y = 2{,}8 - 8x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (S)\begin{cases} x + (2{,}8 - 8x) + z = 2{,}8 \\ 2x + 2(2{,}8 - 8x) = 2{,}8 \\ 2y = 2{,}8 - 8x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (S)\begin{cases} 2{,}8 - 7x + z = 2{,}8 \\ 5{,}6 - 14x = 2{,}8 \\ 2y = 2{,}8 - 8x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (S)\begin{cases} z = 7x \\ 14x = 2{,}8 \\ 2y = 2{,}8 - 8x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0{,}2 \\ 2y = 2{,}8 - 8 \times 0{,}2 \\ z = 7 \times 0{,}2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0{,}2 \\ y = 0{,}6 \\ z = 1{,}4 \end{cases}$$

On vérifie : $0{,}2 + 2 \times 0{,}6 + 1{,}4 = 2{,}8$; $2 \times 0{,}2 + 4 \times 0{,}6 = 2{,}8$ et $8 \times 0{,}2 + 2 \times 0{,}6 = 2{,}8$.
Le petit pot pèse 200 g, le pot moyen pèse 600 g et le grand pot pèse 1,4 kg.

b. *Solution arithmétique*. Cette solution repose sur l'idée suivante : les étagères supportant le même poids, si l'on retire deux objets de même masse à deux étagères, elles supportent toujours le même poids. On considère donc les étagères deux à deux et on les déleste au maximum, afin d'établir des correspondances entre les masses des différents types de pots. On obtient les équivalences suivantes :
– deux pots moyens ont la même masse que 6 petits pots (on regarde les étagères du milieu et du bas et on retire à chacune deux moyens pots et deux petits pots) ;
– un grand pot a la même masse que 7 petits pots (on regarde la disposition initiale des étagères du haut et du bas et on retire à chacune deux pots moyens et un petit pot).
On peut donc exprimer la répartition de la gelée en « équivalents petits pots » : il y a en tout un grand pot, 8 pots moyens et 11 petits pots, ce qui correspond à : $7 + (4 \times 6) + 11 = 42$ petits pots pour une masse totale de 8,4 kg de gelée. Chaque petit pot a donc une masse de $8{,}4 \div 42 = 0{,}2$ kg. On en déduit la masse d'un pot moyen et d'un grand pot.

Exercice 5.

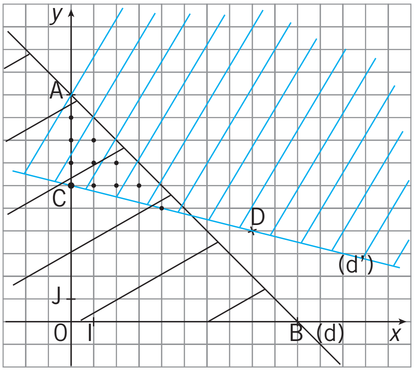
1. Nathan peut avoir 9 pièces de 2 €. En effet, il aura alors moins de 10 pièces et sera en possession de 18 €, donc de plus de 12 €.

2. *Il faut commencer par mettre le problème en équation (voir Fiche 18 exercice 2).*
Soit x le nombre de pièces de 0,50 € et y le nombre de pièces de 2 € en possession de Nathan.
« Nathan a moins de 10 pièces » se traduit par $x + y < 10$ et « il a au moins 12 euros » se traduit par $0{,}5x + 2y \geq 12$.

Il s'agit donc de résoudre le système :

$$(S)\ \begin{cases} x + y < 10 \\ 0{,}5x + 2y \geq 12 \end{cases}$$

Considérons que le plan est muni d'un repère (O, I, J) et soit (d) la droite d'équation $x + y = 10$; (d) passe par A(0 ; 10) et B(10 ; 0).
Soit (d′) la droite d'équation $0{,}5x + 2y = 12$; (d′) passe par les points C(0 ; 6) et D(8 ; 4). On trace (d) et (d′).
Détermination des demi-plans représentant les solutions de chacune des inéquations du système (S) : supposons que $x = 0$ et $y = 0$.
$0 + 0 < 10$ donc le demi-plan représentant les solutions de $x + y < 10$ contient O (*cf.* figure ci-après).
$0{,}5 \times 0 + 2 \times 0 < 12$ donc le demi plan représentant les solutions de $0{,}5x + 2y > 12$ ne contient pas O (*cf.* figure ci-après).



Les solutions du système (S) sont les coordonnées entières (et positives) des points se situant dans la zone doublement hachurée. On lit donc les solutions suivantes : (0 ; 6), (0 ; 7), (0 ; 8), (0 ; 9), (1 ; 6), (1 ; 7), (1 ; 8), (2 ; 6), (2 ; 7), (3 ; 6) et (4 ; 5).

Nathan peut avoir :
– aucune pièce de 50 cents et, au choix, 6, 7, 8 ou 9 pièces de 2 € ;
– une pièce de 50 cents et, au choix, 6, 7 ou 8 pièces de 2 € ;
– deux pièces de 50 cents et 6 ou 7 pièces de 2 € ;
– trois pièces de 50 cents et 6 pièces de 2 € ;
– 4 pièces de 50 cents et 5 pièces de 2 €.

Il faut penser (comme toujours lorsqu'on met un problème en équation) à placer la résolution dans le champ numérique induit par le contexte. Ici, x et y désignent des entiers naturels. Cette donnée est à prendre en compte au moment de la lecture des solutions.

Exercice 6.

Soit x la mesure du côté du carré initial ; l'aire de ce carré est x^2.
Après augmentation, le côté du carré mesure $x + 6$ et l'aire du nouveau carré est $(x + 6)^2$.
« … l'aire vaut 9 fois celle du carré initial » se traduit par l'équation $(x + 6)^2 = 9x^2$.
$(x + 6)^2 = 9x^2 \Leftrightarrow (x + 6)^2 - 9x^2 = 0$
$\Leftrightarrow (x + 6)^2 - (3x)^2 = 0$
$\Leftrightarrow (x + 6 + 3x)(x + 6 - 3x) = 0$ (IR$_3$)
$\Leftrightarrow (4x + 6)(6 - 2x) = 0$
$\Leftrightarrow 4x + 6 = 0$ ou $6 - 2x = 0$ car « un produit est nul si et seulement si un de ses facteurs est nul ».

L'équation $4x + 6 = 0$ a pour solution $x = -\dfrac{3}{2}$.
Cette solution est à rejeter car x désigne une longueur, donc ne peut prendre une valeur négative.
L'équation $6 - 2x = 0$ a pour solution $x = 3$.
On vérifie que $(6 + 3)^2 = 9 \times 3^2$. Le côté du carré mesure 3 cm.

THÈME 5

LES QUATRE OPÉRATIONS

Exercice 1.

Effectuez (sans calculatrice) les calculs suivants :

a. $7{,}2 + 2{,}3 + 2{,}8 + 12{,}725 + 1{,}7$
b. $7{,}2 + 2{,}3 - 2{,}1 - 1{,}3 + 0{,}7$
c. $7{,}2 + (2{,}3 - 2{,}1) - (1{,}3 + 0{,}7)$
d. $5{,}5 + 1{,}5 \times 3$
e. $10 \times 14 \div 7$
f. $15 - 12 \div 3 + 12 \times 3$

Exercice 2.

Placez entre les chiffres un signe d'opération (+ ; – ; × ou ÷) et, au besoin, des parenthèses pour obtenir une écriture correcte sur chaque ligne.

3 3 3 3 = 2	7 7 7 7 = 48
3 3 3 3 = 3	7 7 7 7 = 56
4 4 4 4 = 20	8 8 8 8 = 15
4 4 4 4 = 32	8 8 8 8 = 80
5 5 5 5 = 6	9 9 9 9 = 82

Exercice 3.

De l'égalité « 482 × 1,25 = 602,5 », déduisez les résultats des calculs suivants :

a. $4\,820 \times 12{,}5 = \ldots$
b. $0{,}482 \times 125 = \ldots$
c. $48\,200 \times 0{,}0125 = \ldots$
d. $48{,}2 \times 25 = \ldots$
e. $602{,}5 \div 4\,820 = \ldots$
f. $6{,}025 \div 1{,}25 = \ldots$
g. $6\,025 \div 1\,250 = \ldots$

Exercice 4.

Sans poser d'opérations, calculez 18 × 5 d'au moins trois façons différentes. Indiquez, pour chaque méthode, la règle ou propriété utilisée.

Exercice 5.

a. On vérifiera à la calculatrice que :
$45 \times 6\,767 = 4\,545 \times 67$ et que
$248 \times 534\,534 = 248\,248 \times 534$.
b. Donner deux autres produits « étonnants » (vérifier à la calculatrice).
c. Justifier les deux égalités de la première question.

Exercice 6.

Le reste de la division d'un entier a par 103 est 78. Quel nombre faut-il ajouter à a pour que le quotient entier soit exact et augmente de 2 unités ?
On vérifiera la solution.

Exercice 7.

Après cinq devoirs de même coefficient, un élève calcule qu'il a 11 de moyenne.
Quelle note devra-t-il avoir au prochain devoir « qui compte double » pour augmenter sa moyenne de 2 points ?

Exercice 8.

Sans poser d'opération, donner une valeur approchée au centième de l'opération $1{,}96 \times 1{,}96$.

Exercice 9.

Voici la table de Pythagore de la multiplication :

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

a. Calculer la somme des cinq nombres des deux croix de centre 10.
b. De même, calculer la somme des croix de centre 24.
c. Trouver une règle qui permette de calculer rapidement la somme des cinq nombres d'une croix quelconque de la table. Justifier cette règle.

CORRIGÉS

Exercice 1.

a. $7{,}2 + 2{,}3 + 2{,}8 + 12{,}725 + 1{,}7$
$= (7{,}2 + 2{,}8) + (2{,}3 + 1{,}7) + 12{,}725$
$= 10 + 4 + 12{,}725 = 26{,}725$

b. $7{,}2 + 2{,}3 - 2{,}1 - 1{,}3 + 0{,}7$
$= 7{,}2 + 3 - 2{,}1 - 1{,}3 = 10{,}2 - 3{,}4 = 6{,}8$

c. $7{,}2 + (2{,}3 - 2{,}1) - (1{,}3 + 0{,}7)$
$= 7{,}2 + 0{,}2 - 2 = 7{,}4 - 2 = 5{,}4$

d. $5{,}5 + 1{,}5 \times 3 = 5{,}5 + 4{,}5 = 10$

e. $10 \times 14 \div 7 = 140 \div 7 = 20$
(ou $10 \times 2 = 20$)

f. $15 - 12 \div 3 + 12 \times 3$
$= 15 - 4 + 36 = 11 + 36 = 47$.

Exercice 2.

Plusieurs solutions sont possibles, dont celles qui suivent :

$3 \div 3 + 3 \div 3 = 2$	$7 \times 7 - 7 \div 7 = 48$
$(3 + 3 + 3) \div 3 = 3$	$(7 + 7 \div 7) \times 7 = 56$
$(4 + 4 \div 4) \times 4 = 20$	$8 + 8 - 8 \div 8 = 15$
$4 \times 4 + 4 \times 4 = 32$	$8 \times 8 + 8 + 8 = 80$
$(5 \times 5 + 5) \div 5 = 6$	$9 \times 9 + 9 \div 9 = 82$

Exercice 3.

Déduisons de l'égalité « $482 \times 1{,}25 = 602{,}5$ » les résultats des calculs :

a. $4\,820 \times 12{,}5 = 482 \times 10 \times 1{,}25 \times 10$
$= 602{,}5 \times 100 = 60\,250$

b. $0{,}482 \times 125 = 482 \div 1\,000 \times 1{,}25 \times 100$
$= 602{,}5 \div 10 = 60{,}25$

c. $48\,200 \times 0{,}0125 = 482 \times 100 \times 1{,}25 \div 100$
$= 602{,}5$

d. $48{,}2 \times 25 = 482 \div 10 \times 1{,}25 \times 10 \times 2$
$= 602{,}5 \times 2 = 1\,205$

e. $602{,}5 \div 4\,820 = 602{,}5 \div 482 \div 10$
$= 1{,}25 \div 10 = 0{,}125$

f. $6{,}025 \div 1{,}25 = 602{,}5 \div 100 \div 1{,}25$
$= 482 \div 100 = 4{,}82$

g. $6\,025 \div 1\,250 = 602{,}5 \times 10 \div (1{,}25 \times 1\,000)$
$= 482 \div 100 = 4{,}82$

Pour éviter des erreurs grossières, utiliser des ordres de grandeur des nombres. Exemple : calcul (a) : l'ordre de grandeur du résultat est $5\,000 \times 10$ soit $50\,000$.

Exercice 4.

On peut calculer mentalement 18×5 de plusieurs façons :

Calculs	Propriété utilisée
$(10 + 8) \times 5 = 10 \times 5 + 8 \times 5 = 50 + 40 = 90$	Distributivité de la multiplication sur l'addition.
$(20 - 2) \times 5 = 20 \times 5 - 2 \times 5 = 100 - 10 = 90$	Distributivité de la multiplication sur la soustraction
$(9 \times 2) \times 5 = 9 \times (2 \times 5) = 9 \times 10 = 90$	Associativité de la multiplication
$18 \times 10 \div 2 = 180 \div 2 = 90\ldots$	Multiplier par 5 revient à multiplier par 10 puis diviser par 2.
$18 + 18 + 18 + 18 + 18 = 36 + 36 + 18 = 72 + 18 = 90$	Multiplier un entier par 5 revient à l'ajouter 5 fois.

Exercice 5.

a. $45 \times 6\,767 = 304\,515$
$4\,545 \times 67 = 304\,515$
$248 \times 534\,534 = 132\,564\,432$
$248\,248 \times 534 = 132\,564\,432$

b. $12 \times 3\,535 = 1\,212 \times 35 = 42\,420$
et $32 \times 7\,676 = 3\,232 \times 76 = 245\,632$

c. $45 \times 6\,767 = 45 \times (6\,700 + 67)$
$= 45 \times (67 \times 100 + 67) = 45 \times (67 \times 101)$
$= 67 \times (45 \times 101) = 67 \times (45 \times 100 + 45)$
$= 67 \times 4\,545$.
$248 \times 534\,534 = 248 \times (534 \times 1\,001)$
$= 534 \times (248 \times 1\,001) = 534 \times 248\,248$.

Exercice 6.

Soit q le quotient. Les nombres donnés vérifient la relation caractéristique de la division euclidienne : $a = 103 \times q + 78$. Si on appelle a' le dividende modifié, on aura $a' = 103 \times (q + 2) = 103 \times q + 206$. Le nombre qu'on doit ajouter à a est la différence $a' - a$ c'est le nombre $206 - 78$, soit 128.
Vérification : $a + 128 = 103 \times q + 78 + 128 = 103 \times q + 206 = 103 \times q + 2 \times 103 = 103 \times (q + 2)$.

Exercice 7.

La somme des notes obtenues jusqu'à présent est 55(5×11). Soit n la note qu'il souhaite obtenir au prochain devoir. Sachant que la moyenne espérée est 13, on a : $\dfrac{55 + 2n}{7} = 13$.
En résolvant l'équation, on obtient la valeur 18 pour n.

Exercice 8.

$A = 1{,}96 \times 1{,}96 = 1{,}96^2 = (2 - 0{,}04)^2$
$= 2^2 - 2 \times 2 \times 0{,}04 + 0{,}04^2$
(développement en utilisant l'identité remarquable $((a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2)$.
$A \approx 4 - 0{,}16$; $A \approx 3{,}84$.
Remarque : $0{,}04^2 = (4 \times 10^{-2})^2 = 16 \times 10^{-4}$.
Comme on recherche l'arrondi de A au centième, on « néglige » cette valeur.

Exercice 9.

a. La somme des cinq nombres des deux croix de centre 10 est : $(8 + 12) + (5 + 15) + 10 = 50$.

b. Il y a quatre croix centrées sur 24 :

	16	
21	24	27
	32	

	21	
16	24	32
	27	

	20	
18	24	30
	28	

	18	
20	24	28
	30	

La somme des cinq nombres des quatre croix de centre 24 est 120 :
$(16 + 32) + (21 + 27) + 24 = 120$
$(18 + 30) + (20 + 28) + 24 = 120$

c. Chaque case centrale est le produit de deux entiers. On observe dans les deux cas précédents que la somme des cinq entiers des croix est le produit de la case centrale par 5 ($50 = 10 \times 5$ et $120 = 24 \times 5$).
Montrons que cette règle est toujours vraie.
Soit une croix quelconque centrée sur le produit $n \times p$ et a, b, c, d les entiers périphériques :

			p	
			…	
			a	
n	…	b	$n \times p$	d
			c	

Calculons a, b, c, d en fonction de n et p :
$a = (n - 1) \times p = n \times p - p$
$b = n \times (p - 1) = n \times p - n$
$c = (n + 1) \times p = n \times p + p$
$d = n \times (p + 1) = n \times p + n$.
Il s'ensuit : $a + b + c + d = 4 \times n \times p$ et la somme des cinq nombres de la croix est bien égale à $5 \times n \times p$.

PROPORTIONNALITÉ ET FONCTIONS LINÉAIRES

6

THÈME

Exercice 1.

Entourez les bonnes réponses dans le tableau ci-dessous.

	A	B	C	D
a. Un piéton marchant à la vitesse constante de 5 km/h parcourt 1 km en…	12 min	0,2 h	$\frac{1}{5}$ h	20 min
b. Les dimensions d'un rectangle sont 5,4 cm et 1,8 cm. On l'agrandit : la nouvelle longueur mesure 13,5 cm. La largeur agrandie mesure…	9,9	$\frac{13,5}{3}$	6,25 cm	4,5 cm
c. Si $y = 5x$ alors…	$x = 0,2y$	$\frac{y}{x} = \frac{5}{2}$	$x = \frac{2y}{5}$	$\frac{x}{y} = \frac{1}{5}$
d. Par quel nombre faut-il remplacer a pour avoir un tableau de proportionnalité : <table><tr><td>5</td><td>7</td><td>a</td></tr><tr><td>9</td><td>12,6</td><td>19,8</td></tr></table>	$19,8 \times \frac{9}{5}$	12	11	21,6
e. La réduction la plus avantageuse est…	84 € sur 700 €	1 € sur 8 €	15 € sur 120 €	40 € sur 250 €

Exercice 2.

Un club de sport d'un centre de vacances propose deux formules de prix :

– la formule A : la séance coûte 7 € ;

– la formule B : achat d'une carte d'adhérent à 36 € qui réduit le coût de la séance à 3 €.

a. Exprimer les coûts A(x) et B(x) de x séances pour chacune des formules A et B.

b. Représenter graphiquement dans un repère orthogonal les fonctions A et B en fonction de x (on prendra 1 cm pour 1 séance en abscisse et 1 cm pour 10 € en ordonnée).

c. Interpréter cette représentation.

Exercice 3.

Un couple travaille dans une entreprise. Dominique gagne 50 % de plus que Claude.On posera x le salaire mensuel de Dominique et y le salaire mensuel de Claude.

Le salaire de Claude est augmenté de 12,5 % et celui de Dominique de 5 %.

1. Sachant que le salaire mensuel de Claude était de 1 800 €, quel est le nouveau revenu mensuel du couple ?

2. Exprimer le nouveau revenu mensuel du couple en fonction de y.

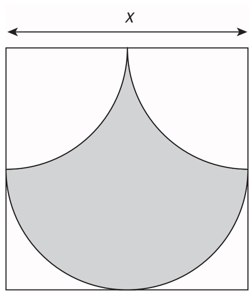
3. En partant d'un salaire initial pour Claude de 1 800 €, calculer le pourcentage d'augmentation des revenus du couple.

4. Plus généralement, montrer que l'augmentation des revenus du ménage en pourcentage est constante, quelle que soit la valeur de y.

Exercice 4.

Trois personnes mettent 9 h 45 min pour effectuer un travail. Combien cinq personnes, travaillant dans les mêmes conditions, auraient-elles mis de temps pour faire le même travail ?

Exercice 5.



1. Après avoir observé le carré ci-dessus, exprimer, en fonction de x, le périmètre $f(x)$du domaine grisé.

2. La fonction $x \mapsto f(x)$ est-elle linéaire ?

Exercice 6.

Alain veut agrandir un dessin qui mesure 14,5 cm × 18 cm.
Pour cela, il utilise une photocopieuse qui dispose des agrandissements suivants :

115 %	122 %	141 %	150 %

Quel agrandissement doit-il choisir pour que son dessin soit agrandi au maximum tout en « rentrant » dans une feuille 21 cm × 29,7 cm ?

Exercice 7. L'écluse (Publication APMEP, n° 35)

Le sas d'une écluse a la forme d'un pavé droit d'une longueur de 125 m et d'une largeur de 12 m. La différence de niveau entre les deux biefs est 7 m. Le remplissage du sas dure 6 min.

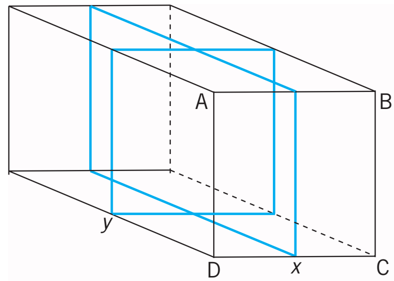
1. Quel est, en m^3, le volume de l'eau admise dans le sas ?

2. Quel est le débit, en L.s^{-1}, d'admission de l'eau ?

3. Quel est le pourcentage de dénivellation entre les deux biefs ?

Exercice 8.

Cet exercice s'appuie sur les documents 1 et 2 qui suivent les questions :
On veut fabriquer une boîte dont la forme est un parallélépipède rectangle. La face ABCD est un carré dont la longueur du côté est x. L'autre dimension du parallélépipède a pour longueur y. On dispose d'une ficelle pour entourer la boîte, comme l'indique la figure suivante. **Pour les questions 1, 2 et 3, la longueur de la ficelle est fixée à 100 cm.**



1. a. Exprimer y en fonction de x sachant que l'on utilise toute la ficelle.

b. Exprimer l'aire du parallélépipède (somme des aires des faces) en fonction de x.L'aire du parallélépipède est-elle proportionnelle au côté du carré ?

c. Pour quelle valeur de x obtient-on un cube ?

2. On a utilisé un tableur-grapheur pour étudier les variations de l'aire du parallélépipède en fonction de la mesure x de l'arête.
On rappelle pour cette question que la longueur de la ficelle est fixée à 100 cm.
En vous aidant des copies d'écrans fournies (documents 1 et 2), quelle est l'aire maximale du parallélépipède ?
Quelles sont alors les dimensions de la boîte ?

Pour les questions suivantes, on fixe $x = 5$.

3. À l'aide du document 2, déterminer l'aire du parallélépipède pour des ficelles de 1 m ; 0,80 m ; 0,75 m ; 0,50 m.

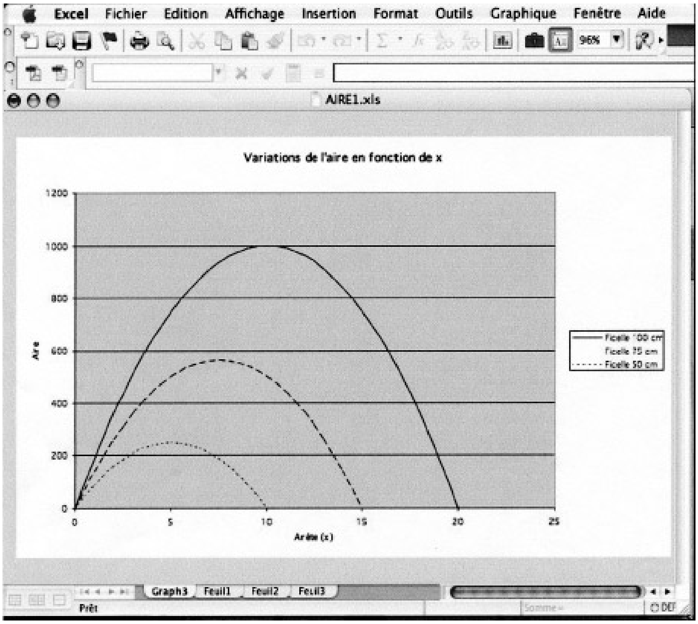
4. Par le calcul, déterminer l'aire du parallélépipède pour des ficelles de 0,6 m et 0,7 m.

5. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous :

Longueur de la ficelle exprimée en cm	80	70	60	50
Aire du parallélépipède en cm^2				

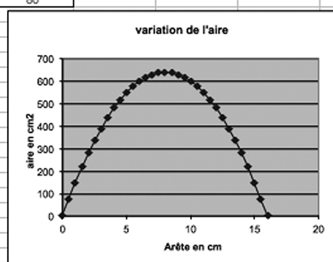
Quelle relation y a-t-il entre l'écart entre deux longueurs et l'écart entre deux aires correspondantes ? Démontrez-la.

Document 1



Document 2

	A	B	C	D	E	F	G
1		Ficelle 1 m	Ficelle 0,75 m	ficelle 0,5 m			Ficelle n cm
2	x	AIRE	AIRE	AIRE		AIRE	80
3	0	0	0	0		0	
4	0,5	97,5	72,5	47,5		77,5	
5	1	190	140	90		150	
6	1,5	277,5	202,5	127,5		217,5	
7	2	360	260	160		280	
8	2,5	437,5	312,5	187,5		337,5	
9	3	510	360	210		390	
10	3,5	577,5	402,5	227,5		437,5	
11	4	640	440	240		480	
12	4,5	697,5	472,5	247,5		517,5	
13	5	750	500	250		550	
14	5,5	797,5	522,5	247,5		577,5	
15	6	840	540	240		600	
16	6,5	877,5	552,5	227,5		617,5	
17	7	910	560	210		630	
18	7,5	937,5	562,5	187,5		637,5	
19	8	960	560	160		640	
20	8,5	977,5	552,5	127,5		637,5	
21	9	990	540	90		630	
22	9,5	997,5	522,5	47,5		617,5	
23	10	1000	500	0		600	
24	10,5	997,5	472,5	-52,5		577,5	
25	11	990	440	-110		550	
26	11,5	977,5	402,5	-172,5		517,5	
27	12	960	360	-240		480	
28	12,5	937,5	312,5	-312,5		437,5	
29	13	910	260	-390		390	
30	13,5	877,5	202,5	-472,5		337,5	
31	14	840	140	-560		280	
32	14,5	797,5	72,5	-652,5		217,5	
33	15	750	0	-750		150	
34	15,5	697,5	-77,5	-852,5		77,5	
35	16	640	-160	-960		0	
36	16,5	577,5	-247,5	-1072,5		-82,5	
37	17	510	-340	-1190		-170	
38	17,5	437,5	-437,5	-1312,5		-262,5	
39	18	360	-540	-1440		-360	
40	18,5	277,5	-647,5	-1572,5		-462,5	
41	19	190	-760	-1710		-570	
42	19,5	97,5	-877,5	-1852,5		-682,5	
43	20	0	-1000	-2000		-800	



CORRIGÉS

Exercice 1.

a. Réponses A, B et C : pour 1 km le piéton met 5 fois moins de temps que pour 5 km.

b. Réponses B et D : la largeur du rectangle initial mesurant le tiers de sa longueur, il en sera de même sur la figure agrandie (un agrandissement – ou une réduction – conserve les proportions) et $13{,}5 \div 3 = 4{,}5$. On peut aussi calculer l'échelle : $13{,}5 \div 5{,}4 = 2{,}5$; la largeur agrandie mesure $1{,}8 \times 2{,}5$, soit 4,5.

c. Réponses A et D : $x = \frac{y}{5} = \frac{1}{5}y = 0{,}2y$ (on divise les 2 membres de l'égalité donnée par 5).

d. Réponse C : on peut rechercher le coefficient de proportionnalité (le nombre k par lequel on multiplie les nombres de la 1re ligne pour obtenir ceux de la 2e) : on a $5 \times k = 9$ d'où $k = \frac{9}{5}$ ($= 1{,}8$). Par conséquent, pour passer de la 2e ligne à la 1re il faut diviser par $\frac{9}{5}$, c'est-à-dire multiplier par $\frac{5}{9}$. D'où $19{,}8 \times 5/9 = 11$.

e. Réponse D : pour connaître la réduction la plus avantageuse, il est commode d'exprimer les réductions en pourcentage.

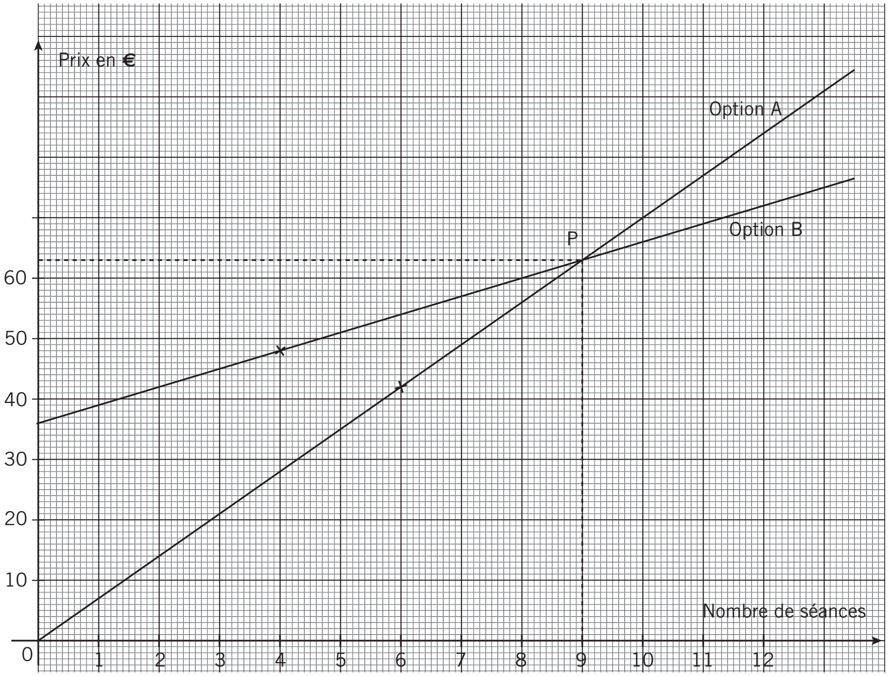
On obtient dans l'ordre : $\frac{84}{700} = 0{,}12 = 12\ \%$; $\frac{1}{8} = 0{,}125 = 12{,}5\ \%$; $\frac{15}{120} = 0{,}125 = 12{,}5\ \%$; $\frac{40}{250} = 0{,}16 = 16\ \%$.

Exercice 2.

a. $A(x) = 7x$ et $B(x) = 3x + 36$.

b. $A(x)$ est une fonction linéaire, donc sa représentation graphique est une droite passant par l'origine. $B(x)$ est une fonction affine, donc sa représentation graphique est une aussi une droite, mais elle ne passe par l'origine car l'image de 0 (le prix pour 0 séance) est 36. Pour construire ces droites, il faut déterminer les coordonnées de deux points ; par exemple :

A(0) = 0, A(6) = 42, B(0) = 36 et B(4) = 48.



c. Sur le graphique, les droites se coupent au point P(9 ; 63). Pour 9 séances, les deux tarifs sont les mêmes (63). Pour un nombre de séances supérieur à 9, la formule B est la plus avantageuse. Remarque : Une lecture graphique étant approximative, on utilise généralement la solution algébrique. Les deux tarifs sont identiques pour $A(x) = B(x)$, soit pour $7x = 3x + 36$. La solution de cette équation est 9 (la lecture graphique est confirmée).

Exercice 3.

Si un salaire augmente de 12,5 %, le nouveau salaire est l'ancien « × 1,125 ».

1. Si le salaire de Claude était 1 800 €, alors celui de Dominique était de 1 800 × 1,5 soit 2 700 €. Le nouveau revenu mensuel pour le couple est : 1 800 × 1,125 + 2 700 × 1,05 = 4 860 €.

2. On pose x le salaire de Dominique et y le salaire de Claude.

$x = y + \frac{1}{2}y$ donc $x = \frac{3}{2}y = 1{,}5y$.

On pose r le revenu du couple avant augmentation et R le revenu du couple après augmentation.

On a : $R = y \times 1{,}125 + 1{,}5y \times 1{,}05 = 2{,}7y$.

3. Pour $y = 1\,800$, on a : $x = 2\,700$, $r = 4\,500$ et $R = 4\,860$.

$\frac{R}{r} = \frac{4\,860}{4\,500} = 1{,}08$; donc le pourcentage d'augmentation est de 8 %.

4. On pose α la valeur du pourcentage d'augmentation.

On a $r = y + 1{,}5y = 2{,}5y$ et $R = 2{,}7y$

$$\alpha = \frac{(R - r)}{r} = \frac{(2{,}7 - 2{,}5)y}{2{,}5y} = \frac{0{,}2y}{2{,}5y}$$

$$= \frac{2}{25} = \frac{8}{100} = 8\ \%.$$

Le pourcentage d'augmentation reste constant quelle que soit la valeur de y.

Exercice 4.

Il s'agit d'une situation de « proportionnalité inverse ».

9 h 45 min = 9,75 h. On peut raisonner ainsi : une personne mettrait 3 fois plus de temps que trois personnes, donc 9,75 × 3 (h) ; cinq personnes effectueraient ce travail en 5 fois moins de temps qu'une personne, soit en (9,75 × 3) ÷ 5 (h), c'est-à-dire :

5,85 h (5 h + 0,85 × 60 min) ou 5 h 51 min.

On pouvait aussi appliquer directement l'opérateur « $\times \frac{3}{5}$ ».

Exercice 5.

1. Le domaine grisé a pour périmètre celui d'un cercle de rayon $\frac{x}{2}$; d'où $f(x) = \pi \times x$.

2. $x \mapsto f(x)$ donne $x \mapsto \pi \times x$; c'est une fonction linéaire de coefficient π.

Exercice 6.

On calcule les rapports « dimensions feuille/dimensions dessin » :

$\frac{21}{14{,}5} \approx 1{,}45$ (≈ 145 %)

et $\frac{29{,}7}{18} = 1{,}65$ ($= 165$ %).

Alain devra choisir l'agrandissement 141 %.

Exercice 7.

1. Le volume V d'eau est :
$125 \times 12 \times 7 = 10\,500$ m^3.

2. Le débit est $\frac{V}{t}$; V = 10 500 000 L,
6 min = 360 ,
d'où $\frac{V}{t} = \frac{10\,500\,000}{360} \approx 29\,167$ L.s^{-1}.

3. La dénivellation (en %) est :
$\frac{7}{125} = 0{,}056 = 5{,}6$ %.

Exercice 8.

1. a. En exprimant en centimètres la longueur de la ficelle,on a :
$6x + 2y = 100$, d'où $y = 50 - 3x$.
b. Aire A du parallélépipède en fonction de x :
$A = 2x^2 + 4xy$, comme $y = 50 - 3x$,
$A = 2x^2 + 4x(50 - 3x) = -10x^2 + 200x$.
Il ne s'agit pas d'une fonction linéaire, donc l'aire du parallélépipède n'est pas proportionnelle au côté du carré.
c. On obtient un cube lorsque $y = x$.
Dans ce cas, on a $6x + 2y = 6x + 2x = 8x = 100$ soit $x = 12{,}5$ cm.

2. Le document 1 représente le graphe de la fonction qui associe à x l'aire correspondante du parallélépipède. La courbe obtenue est une parabole. On peut lire que l'aire est maximale pour une valeur de x proche de 10.
Le tableau du document 2 donne des indications plus précises.
A la ligne 25, dans la première colonne (cellule B25), on lit que l'aire maximale est 1 000 cm^2 : elle correspond à une valeur de x égale à 10 cm.
Dans ce cas, comme $y = 50 - 3x$, on a :
$y = 50 - 30 = 20$ cm.

3. Pour répondre à cette question il suffit de lire les informations données par le tableur à la ligne 15. On obtient :

Longueur de la ficelle exprimée en cm	100	80	75	50
Aire du parallélépipède en cm^2	750	550	500	250

4. Dans cette question, on a $x = 5$.
Déterminons y pour une ficelle de 0,6 m, soit de 60 cm : la longueur de la ficelle est $6x + 2y = 60$, d'où : $30 + 2y = 60$ et $y = 15$.
Par conséquent, l'aire est :
$2x^2 + 4xy = 50 + 300 = 350$ cm^2
On raisonne de la même manière avec une ficelle de 0,7 m (70 cm) :on obtient $y = 20$ et une aire de 450 cm^2.

5. On complète le tableau en utilisant les deux questions précédentes :

Longueur de la ficelle exprimée en cm	80	70	60	50
Aire du parallélépipède en cm^2	550	450	350	250

À la lecture du tableau on peut constater que lorsque la longueur de la ficelle augmente de 10 cm, l'aire augmente de 100 cm^2.
On pose ℓ la longueur de la ficelle et A_1 l'aire correspondante.
on a : $30 + 2y = \ell$ et $A = 2x^2 + 4xy = 50 + 20y$ (car $x = 5$).

Il s'ensuit : $y = \frac{\ell}{2} - 15$ et

$A_1 = 50 + 20\left(\frac{\ell}{2} - 15\right) = 10\,\ell - 250$

Si on prend une longueur de ficelle de longueur $\ell + e$ (A_2 l'aire correspondante) :
on a $30 + 2y = \ell + e$ et $A = 50 + 20y$

D'où $y = \frac{(\ell + e)}{2} - 15$ et

$A_2 = 50 + 20\left(\frac{(\ell + e)}{2} - 15\right)$
$= 10(\ell + e) - 250$.
La différence des aires est $A_2 - A_1 = 10e$.
On en conclut, que lorsque que l'écart entre les longueurs est e, l'écart entre les aires correspondantes est $10e$ (cette relation est bien vérifiée dans le tableau).

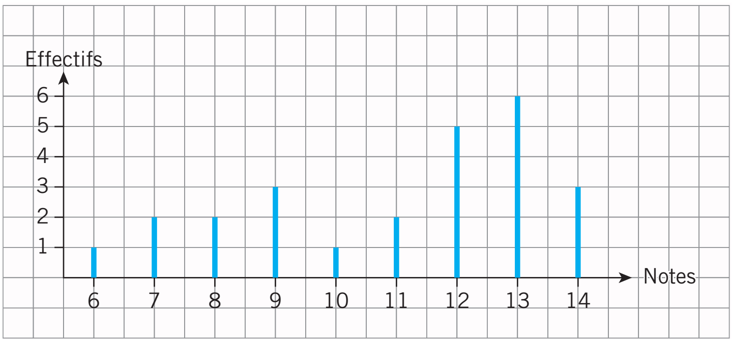
6 THÈME

THÈME 7

GESTION DE DONNÉES, STATISTIQUE ET PROBABILITÉS

Exercice 1.

On considère la série statistique représentée par le diagramme en bâtons ci-après :



Pour chacune des affirmations suivantes, dites si elle est vraie ou fausse.

a. La note la plus fréquente est 13.
b. L'étendue des notes est 14.
c. L'effectif total de la série est 25.
d. Les effectifs cumulés croissants sont dans l'ordre :
e. 1 ; 3 ; 5 ; 8 ; 9 ; 11 ; 16 ; 22 ; 25.
f. La fréquence de la note 12 est 0,25.
g. 32 % des notes sont inférieures à 10.
h. La note médiane est 10.
i. La note moyenne est 11.
j. Si on ajoute deux points à chacune des notes de la série alors la moyenne, la médiane et l'étendue sont inchangées.

Exercice 2.

Un enseignant a donné le même contrôle à ses deux classes de troisième. Il écrit « dans chacune de mes classes, les garçons réussissent mieux que les filles mais, en tout, les filles ont mieux réussi que les garçons ». Le Principal du collège est surpris et lui fait savoir qu'il s'est sans doute trompé. L'enseignant maintient son propos et lui adresse le tableau des résultats de ses élèves. Qui a raison ?

	3^e A			3^e B	
	notes $\geq$ 10	notes < 10		notes $\geq$ 10	notes < 10
Nombre de filles	10	6		2	5
Nombre de garçons	6	3		7	11

Exercice 3.

Théo rentre du collège et annonce à son père qu'au dernier contrôle de mathématiques, il y avait autant d'élèves dans sa classe à avoir une note supérieure à la sienne que d'élèves à avoir une note inférieure. Son père lui demande quelle était la moyenne de la classe au contrôle, et en déduit celle de son fils. Est-ce possible ?

Exercice 4.

Le tableau ci-dessous donne les précipitations et les températures moyennes d'une ville sur une année.

	Jan.	Fev.	Mars	Avril	Mai	Juin	Juil.	Août	Sept.	Oct.	Nov	Dec.
Hauteur de pluie en mm	11	10	9	8	10	11	8	11	9	8	10	12
Température en °C	– 2	– 1	0	3	7	10	11	12	9	5	2	– 2

Représenter sur un même graphique ces données.

Exercice 5.

Un industriel a commandé à un sous-traitant un lot de 40 pièces cylindriques dont le diamètre doit mesurer 80 mm et il est convenu que le lot ne sera accepté que si les deux conditions suivantes sont simultanément réalisées :

– Première condition : l'écart entre 80 mm et la moyenne $\bar{x}$ du lot est inférieur à 0,05 mm.

– Deuxième condition : au moins 60 % des pièces du lot ont un diamètre d tel que $80 - 0,05 \leq d \leq 80 + 0,05$.

Les mesures faites sur le lot sont les suivantes :

Mesure de d à 0,05 mm près	79,75	79,80	79,85	79,90	79,95	80	80,05	80,10	80,15	80,20
Nombre de pièces	1	2	3	5	6	14	5	2	1	1

1. Calculer la moyenne $\bar{x}$ des mesures faites.

2. Quel est le pourcentage de pièces dont le diamètre d vérifie la deuxième condition ?

3. Le lot est-il accepté ou refusé par l'industriel ? Justifier la réponse.

Exercice 6.

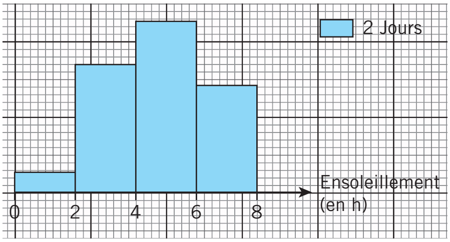
Le tableau ci-dessous donne la distance entre le domicile et le lieu de travail des personnes employées dans une entreprise.

Distance en km	[0 ; 1[	[1 ; 5[	[5 ; 11[
Nombre de personnes	8	16	12

Construire, sur papier millimétré, l'histogramme de cette série dont les classes n'ont pas la même amplitude. On prendra 1 cm^2 pour représenter un effectif de 4 personnes et 0,5 cm pour représenter 1 km sur l'axe des abscisses.

Exercice 7.

L'histogramme ci-dessous représente, pour une ville, la durée d'ensoleillement exprimée en heures sur une période de 40 jours.



Déterminer la médiane de cette série de données à partir de l'histogramme fourni.

Exercice 8.

Indiquez quelles réponses sont exactes.

			A	B	C
1		Les cartes d'un jeu de 32 cartes sont réparties en quatre catégories (carreau, cœur, pique et trèfle). Chaque catégorie compte huit cartes (As, Roi, Dame, Valet, 10, 9, 8, 7). En tirant une carte au hasard,			
	a	la probabilité de tirer une carte de couleur noire est…	0,25	0,5	0,75
	b	la probabilité de tirer un trèfle est…	0,25	0,5	0,75
	c	la probabilité de tirer une dame est…	0,0625	0,125	0,25
	d	la probabilité de tirer un 7 rouge est…	0,0625	0,125	0,25
2		On lance à deux reprises un dé à 6 faces dont une face est rouge, deux sont bleues et trois sont jaunes. La probabilité d'obtenir « jaune » puis « bleu » est…	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$
3		Jean est un étonnant personnage : chaque jour, soit il rit, soit il pleure. S'il rit un jour, la probabilité pour qu'il rie le lendemain est 0,6. S'il pleure, alors la probabilité pour qu'il pleure à nouveau le lendemain est 0,2. Dimanche, Jean a ri. La probabilité pour qu'il rie le mardi se calcule en effectuant…	$0{,}6^2 + 0{,}4 \times 0{,}8$	$0{,}8^2 + 0{,}2^2$	$0{,}36 + 0{,}32$

Exercice 9.

Dix urnes opaques et indiscernables contiennent des jetons blancs et des jetons noirs. Il y a trois urnes contenant chacune 400 jetons noirs et 600 jetons blancs, deux urnes contenant chacune 400 jetons noirs et 1 600 jetons blancs et cinq urnes contenant chacune 50 jetons noirs et 450 jetons blancs.

1. On choisit au hasard une des urnes, de laquelle on tire au hasard un jeton. Quelle est la probabilité de l'événement (N) : « on a tiré un jeton noir » ?

2. On mélange tous les jetons dans une grande caisse, puis on tire un jeton au hasard. Quelle est la probabilité pour que le jeton tiré soit noir ? Que constate-t-on ?

Exercice 10.

Un jeu ancien, appelé « jeu du franc-carreau », consistait à lancer un jeton sur un quadrillage tracé au sol et à miser sur le fait que le jeton touche ou non une des lignes du quadrillage.

Mehdi joue au jeu du franc-carreau sur un plateau en bois à quadrillage carré et s'intéresse à l'événement (E) : « le jeton ne touche aucun côté de carré ». Il n'a pas tenu compte des cas où le jeton tombait du plateau.

Il a relevé les résultats de ses expériences dans le tableau suivant :

Nombre de lancers	Nombre de réalisation de (E)
5	2
10	3
20	6
50	13
100	22
200	54
300	73

1. Calculer la fréquence de l'événement (E) et proposer une valeur de $p(E)$.

2. Prouver que $p(E) = \frac{1}{4}$.

CORRIGÉS

Exercice 1.

Bien que l'énoncé ne le précise pas explicitement, le diagramme semble représenter les résultats d'une classe à un devoir.

a. Vrai – La note 13 a été la note la plus obtenue (6 fois).

b. Faux – Les notes sont comprises entre 6 et 14. L'étendue de la série est 8 (14 – 6 = 8).

c. Vrai – L'effectif total est la somme des effectifs par valeur (1 + 2 + 2 + 3 + 1 + 2 + 5 + 6 + 3 = 25).

d. Vrai – Pour chaque valeur *n*, l'effectif cumulé croissant correspond au nombre de notes inférieures ou égales à n.

e. Faux – La note 12 a été obtenue 5 fois sur 25. Sa fréquence est 5/25 soit 20/100 ou 0,20.

f. Vrai – Il y a 8 notes inférieures à 10, soit 8 notes sur 25 ou 32 sur 100.

g. Faux – La médiane est 12. La valeur médiane est celle qui partage une série (ordonnée) en deux parties de même effectif. Ici, la série comportant 25 notes, la médiane est la 13e note.

h. Vrai – La moyenne est la somme des notes divisée par l'effectif total soit :

i. $$\frac{1\times 6+2\times 7+2\times 8+3\times 9+1\times 10}{25}$$
$$\frac{+\ 2\times 11+5\times 12+6\times 13+3\times 14}{25}=11$$

j. Faux – Si on ajoute deux points à chacune des notes de la série alors la moyenne et la médiane augmentent de deux points. En revanche, l'étendue des notes est inchangée (les valeurs extrêmes étant augmentées de deux points, leur différence ne varie pas).

Exercice 2.

Aussi surprenant que cela puisse paraître, l'enseignant ne s'est pas trompé… En restant prudent… Les propos tenus par l'enseignant ne sont valables que pour ce contrôle et les deux classes dont il a la charge.

1. Calculons le pourcentage des notes supérieures ou égales à 10 dans chacune des classes selon les sexes :

– en 3e A : pour les filles : $\frac{10}{16}=62{,}5\%$; pour les garçons : $\frac{6}{9}\approx 67\ \%$

– en 3e B : pour les filles : $\frac{2}{7}\approx 29\ \%$; pour les garçons : $\frac{7}{18}\approx 40\ \%$

Chaque fois, les garçons semblent meilleurs, et pourtant…

2. Considérons les deux classes réunies, le pourcentage des notes supérieures ou égales à 10 est $\frac{12}{23}\approx 52\ \%$ pour les filles et $\frac{13}{27}\approx 48\ \%$ pour les garçons.

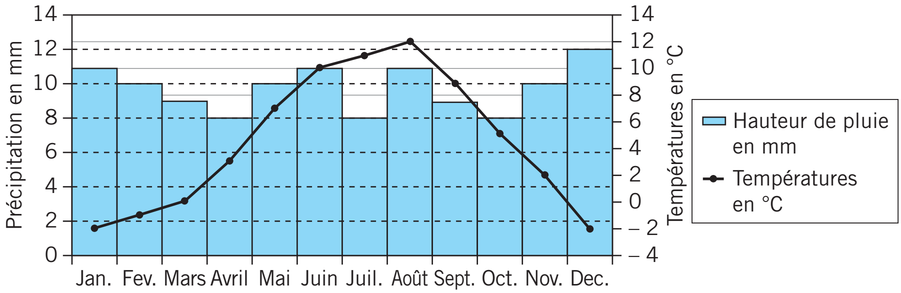
On en conclut bien que, globalement, les filles ont mieux réussi que les garçons.

Exercice 3.

La note de Théo correspond à la note médiane. La médiane et la moyenne sont des indicateurs indépendants. Par exemple : si on considère les notes 7, 8, 12, 16 et 17, la médiane est 12 et la moyenne vaut aussi 12 mais si les notes sont : 3, 4, 12, 14 et 15, la médiane est toujours 12 alors que la moyenne est $\frac{48}{5}=9{,}6$. Par ailleurs, si les notes sont 4, 10, 14, 15 et 17, la moyenne est 12, alors que la médiane est 14. La connaissance de la moyenne ne suffit donc pas pour trouver la médiane ; le père de Théo se trompe…

Exercice 4.

Il s'agit ici de construire un diagramme climatique comme on en rencontre en géographie. Usuellement, on représente les précipitations par un « histogramme » (en fait, il s'agit d'un diagramme en tuyaux d'orgue) et les températures par une courbe. Les mois de l'année sont notés en abscisse. On construit deux axes des ordonnées : l'un pour les précipitations et l'autre pour les températures. On obtient (aux échelles choisies près) la représentation graphique suivante :



Exercice 5.

1. La moyenne $\bar{x}$ des mesures effectuées est égale à :

$$\bar{x} = \frac{1 \times 79{,}75 + 2 \times 79{,}80 + \ldots + 1 \times 80{,}15 + 1 \times 80{,}2}{40} = \frac{3\,198{,}9}{40} = 79{,}9725$$

2. La deuxième condition :
$80 - 0{,}05 \leq d \leq 80 + 0{,}05$
équivaut à $79{,}95 \leq d \leq 80{,}05$. Le nombre de pièces dont le diamètre d vérifie cette double inégalité est égal à $6 + 14 + 5 = 25$, soit un pourcentage égal à $\frac{25}{40} = 0{,}625$ soit 62,5 %.

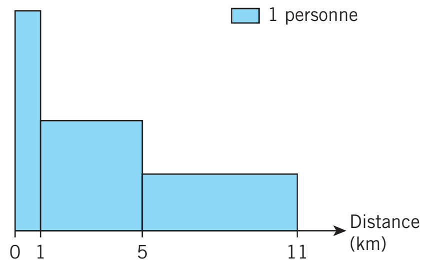
3. L'écart entre la moyenne $\bar{x}$ et 80 mm est $80 - 79{,}9725 = 0{,}0275$ mm. Cet écart est inférieur à 0,05 mm ; la première condition est donc remplie. À la deuxième question, on a montré que plus de 60 % des pièces vérifiait la deuxième condition. On en conclut que le lot sera accepté.

Exercice 6.

Sur l'axe des abscisses, 1 km est représenté par 0,5 cm ; les largeurs (l) des « barres » représentant les amplitudes des classes (respectivement 1, 4, 6 (km)), elles mesurent respectivement 0,5 cm, 2 cm et 3 cm. Sur un **histogramme,** les aires des « barres » contiguës sont proportionnelles aux effectifs de chaque classe. Sachant que 1 cm^2 représente un effectif de 4 personnes, les aires des « barres » seront respectivement 2 cm^2, 4 cm^2 et 3 cm^2. Les classes n'ayant pas ici la même amplitude, les hauteurs (h) des « barres » ne sont pas proportionnelles aux effectifs (le graphique ne comportera donc pas d'axe des ordonnées). On peut calculer les hauteurs en utilisant le tableau suivant :

Distance en km	[0 ; 1[	[1 ; 5[	[5 ; 11[
Effectifs	8	16	12
Largeur (l) en cm	0,5	2	3
Aire en cm^2	$8 \div 4 = 2$	$16 \div 4 = 4$	$12 \div 4 = 3$
Hauteur (h) en cm	$2 \div 0{,}5 = \mathbf{4}$	$4 \div 2 = \mathbf{2}$	$3 \div 3 = \mathbf{1}$

On construit l'histogramme de la série :



Exercice 7.

La moitié de l'effectif est 20 jours. D'après l'histogramme : la somme des deux premières classes est 14 jours (2 + 12) et la somme des trois premières classes est 30 jours (14 + 16). La classe médiane est donc la classe [4 ; 6[. On peut prendre comme valeur médiane toute valeur de cette classe. Cependant, selon le contexte, on peut chercher à préciser sa valeur (théorique). Ainsi, ici, la médiane « correspond » à 6 jours dans la classe [4 ; 6[dont l'effectif est 16 (jours). L'amplitude de chaque classe représentant 2 heures d'ensoleillement,

on peut considérer que la médiane est :
$4 \text{ h} + \frac{6}{16} \times 2 \text{ h} = 4 \text{ h} + 0{,}75 \text{ h} = 4 \text{ h } 45 \text{ min}.$

Exercice 8.

1. a. Réponse B – Il y a 16 cartes de couleur noire sur les 32 cartes, donc la probabilité de tirer une carte de couleur noire est 16/32 soit 0,5.

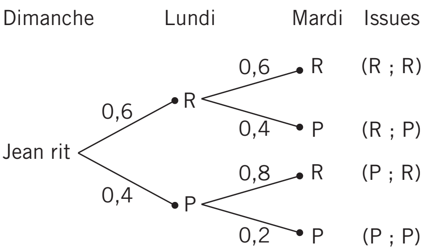
b. Réponse A – Il y a 8 cartes de trèfle sur les 32 cartes, donc la probabilité de tirer une carte de trèfle 8/32 soit 0,25.

c. Réponse B – Il y a 4 dames dans le jeu, donc la probabilité de tirer une dame est 4/32, soit 0,125.

d. Réponse A – Le jeu comporte 2 cartes 7 qui sont rouges (en cœur et en carreau), donc la probabilité de tirer une de ces cartes est 2/32 soit 0,0625.

2. Réponse C – Lors d'un lancer, la probabilité d'obtenir « jaune » est 3/6 soit 1/2, celle d'obtenir « bleu » est 2/6 soit 1/3, donc la probabilité d'obtenir « jaune » puis (et) « bleu » est le produit de ces deux probabilités, soit 1/6.

3. Réponses A et C (elles représentent le même nombre) – Les événements « Jean rit » (R) et « Jean pleure » (P) sont des événements contraires. Sachant que si jean rit un jour, la probabilité pour qu'il rie le lendemain est 0,6 ; on en déduit que la probabilité de l'événement contraire (jean pleure) est 0,4. On peut représenter la situation par l'arbre suivant :



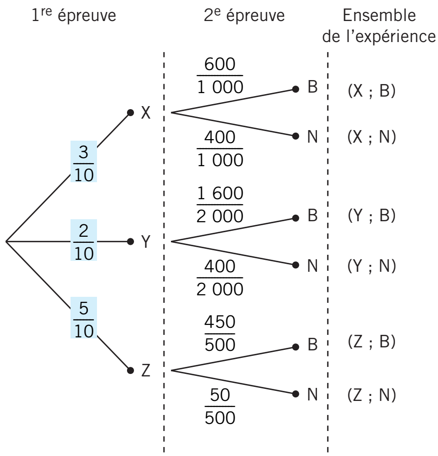
L'événement R pour le mardi concerne les issues (R ; R) et (P ; R). Leurs probabilités respectives sont $0{,}6^2$ et $0{,}4 \times 0{,}8$. On en conclut que la probabilité que Jean rie le mardi est $0{,}6^2 + 0{,}4 \times 0{,}8$ soit $0{,}36 + 0{,}48$ (= 0,84).

Exercice 9.

Les données de l'énoncé peuvent être organisées dans le tableau suivant :

Type d'urne	X	Y	Z
Nombre de jetons noirs dans l'urne	400	400	50
Nombre de jetons blancs dans l'urne	600	1 600	450
Nombre total de jetons dans l'rne	1 000	2 000	500
Nombre d'urnes de ce type	3	2	5

1. L'expérience décrite est composée de deux épreuves dépendantes (« choisir une urne » et « tirer une boule dans cette urne »), dont on peut construire l'arbre pondéré des possibles :



Attention

(X ; N) est l'événement : « on a choisi une urne de type X, puis tiré un jeton noir de l'urne ».

On a : $p(\text{N}) = p(\text{X} ; \text{N}) + p(\text{Y} ; \text{N}) + p(\text{Z} ; \text{N})$

$$= \frac{3}{10} \times \frac{400}{1\,000} + \frac{2}{10} \times \frac{400}{2\,000} + \frac{5}{10} \times \frac{50}{500}$$

$$= \frac{3}{10} \times \frac{4}{10} + \frac{2}{10} \times \frac{2}{10} + \frac{5}{10} \times \frac{1}{10}$$

$$= \frac{12}{100} + \frac{4}{100} + \frac{5}{100} = \frac{21}{100} = 0{,}21.$$

2. Si l'on met tous les jetons dans une caisse et que l'on en tire un au hasard, il s'agit d'une expérience aléatoire pour laquelle tous les jetons ont la même probabilité d'être tirés (équiprobabilité). Soit (N') l'événement : « on tire un jeton noir ». On a alors :

$$p(\text{N}') = \frac{\text{nombre de jetons noirs}}{\text{nombre de jetons}}$$

$$= \frac{3 \times 400 + 2 \times 400 + 5 \times 50}{3 \times 1\,000 + 2 \times 2\,000 + 5 \times 500}$$

$= \frac{2\,250}{9\,500} = \frac{9}{38} \approx 0{,}24.$

On constate que : $p(\text{N}) < p(\text{N'})$!

Exercice 10.

1.

Nombre de lancers	Nombre de réalisation de (E)	Fréquence de (E)
5	2	$\frac{2}{5} = 0{,}4$
10	3	$\frac{3}{10} \approx 0{,}33$
20	6	$\frac{6}{20} \approx 0{,}33$
50	13	$\frac{13}{50} \approx 0{,}26$
100	22	$\frac{22}{100} = 0{,}22$
200	54	$\frac{54}{200} = 0{,}27$
300	73	$\frac{73}{300} \approx 0{,}24$

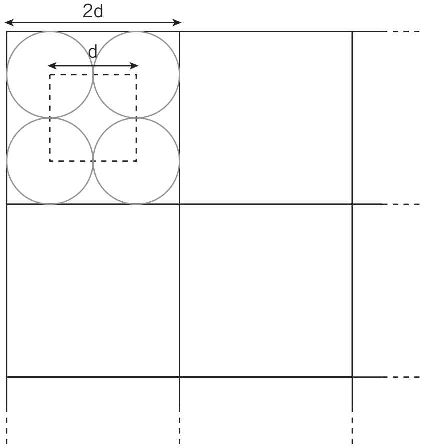
La fréquence de (E) semble se stabiliser « autour de » 0,25. On peut donc conjecturer que $p(\text{E}) = 0{,}25$.

2. Prouvons que $p(\text{E}) = \frac{1}{4}$.

Soit d le diamètre du jeton. Supposons que le quadrillage soit constitué de n carreaux. Tant que le centre du jeton se trouve sur le plateau, le jeton ne tombe pas.

L'aire totale du plateau est : $A = (2d)^2 \times n$.

Pour que le jeton ne soit en contact avec aucun côté de carreau, il faut que son centre se trouve à l'intérieur de l'un des carrés de côté d et de même centre que les centres des carrés (voir figure).



Le centre du jeton peut donc couvrir des surfaces dont l'aire cumulée est $A' = n \times d^2$.

On en déduit que :

$$p(\text{E}) = \frac{\text{A'}}{\text{A}} = \frac{d^2 \times n}{(2d)^2 \times n} = \frac{1}{4}.$$

GÉOMÉTRIE PLANE

Exercice 1.

Pour chacune des affirmations suivantes, dites si elle est vraie ou fausse et justifiez.

a. Un carré est un losange.

b. Un parallélogramme est un rectangle.

c. Un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange.

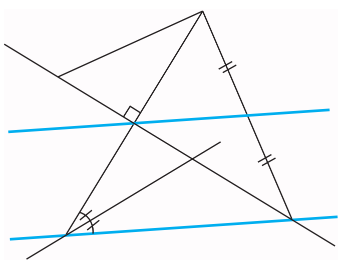
d. Un quadrilatère qui a deux angles droits est un trapèze rectangle.

e. Un quadrilatère qui a trois côtés de même longueur et deux angles droits est un carré.

Exercice 2.

1. Rédiger un programme de construction de la figure suivante, sans tenir compte de ses dimensions.

2. Construire la figure à l'aide du compas et de la règle non graduée.



Exercice 3.

Un trésor est caché dans une forêt. Pour le retrouver, une vieille carte signale une source S, une maison M, un rocher R et un calvaire C qui délimitent cette forêt et un arbre centenaire A. Un chemin rectiligne mène de la maison au rocher et une rivière, que l'on estimera suivre un cours rectiligne, part de la source et passe devant la maison. Il est écrit : « le trésor se trouve :

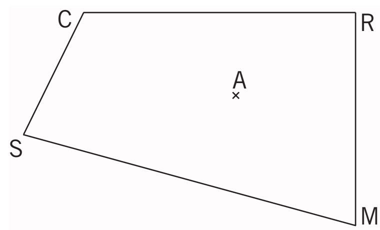
– à plus de 2 000 m de l'arbre centenaire ;

– plus près de la maison que du rocher ;

– plus près du chemin que de la rivière ;

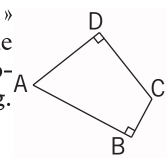
– à plus de 800 m du chemin. »

Sachant que la carte est réalisée à l'échelle 1/100 000, colorier la zone dans laquelle le trésor peut se trouver. Les traits de construction, effectués uniquement à la règle et au compas, devront être laissés apparents ; chaque tracé devra être justifié.



Exercice 4.

On appelle « amandin » un quadrilatère convexe dont deux angles opposés sont droits (*cf.* fig. ci-contre).



1. Voici 5 affirmations.
Répondez par vrai ou faux en justifiant votre réponse.

a. Un rectangle est un amandin.

b. Tous les trapèzes rectangles sont des amandins.

c. Certains amandins sont des losanges.

d. Un amandin dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange.

e. Un amandin dont les diagonales sont de même longueur est un rectangle.

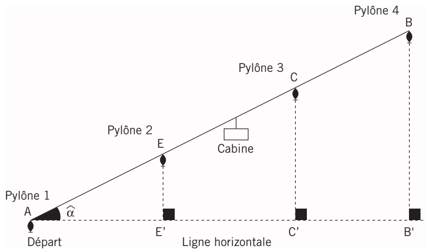
2. On considère l'amandin ABCD dont les angles droits sont en B et D tel que : la diagonale [AC] a une longueur de 6 cm ;
la hauteur du triangle (ABC) issue de B mesure 2 cm ;
le triangle ADC est isocèle.

a. Construire ABCD en justifiant les tracés et les différentes étapes de la construction.

b. Déterminer AD au mm près.

Exercice 5.

Une station de sports d'hiver est équipée d'un téléphérique pour permettre aux skieurs d'atteindre un plateau en altitude. Des pylônes sont placés en A, E, C et B pour soutenir le câble que l'on considérera rectiligne.
Le câble mesure 2,48 km.
L'altitude au point A est de 2 100 m, l'altitude au point B est de 2 620 m.



Remarque : sur ce schéma, les mesures ne sont pas respectées.

1. On définit la pente comme étant le rapport entre la hauteur du dénivelé (BB' sur le dessin) et la distance parcourue à l'horizontale (AB' sur le dessin). Calculer la pente de ce câble et l'exprimer en pourcentage.

2. Entre B et C, le câble mesure 480 m. Calculer CC', en déduire l'altitude au point C, arrondie au mètre.

3. E est le milieu du segment [AC] et entre E et C, la cabine progresse à la vitesse constante de 5 m/s. Combien de temps met-elle à parcourir la distance EC ? Vous donnerez le résultat en minutes et secondes.

Exercice 6.

Démontrer que :

1. La somme des mesures des angles d'un triangle ABC est égale à 180° (indication : on tracera la parallèle à (BC) passant par A).

2. Si ABC est un triangle rectangle en A, alors A appartient au cercle de diamètre [BC] (indication : I étant le milieu du segment [BC], on placera le point D tel que I soit aussi le milieu de [AD]).

Exercice 7.

1. a. Tracer un segment [BC] tel que BC = 15 cm. Placer un point A tel que AB = 9 cm et AC = 12 cm.

b. Démontrer que ABC est un triangle rectangle.

2. a. Placer le milieu M de [BC]. Tracer le cercle de diamètre [AB]. Ce cercle recoupe le segment [BC] en D et le segment [AM] en E.

b. Démontrer que les triangles ABE et ABD sont rectangles.

3. a. Construire le point F tel que M soit le milieu de [EF].

b. Démontrer que le quadrilatère BECF est un parallélogramme.

c. En déduire que les droites (BE) et (CF) sont parallèles, et que les droites (AF) et (CF) sont perpendiculaires.

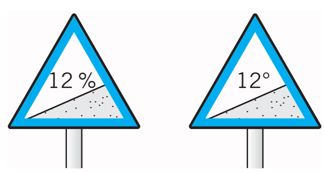
4. Soit H le point d'intersection des droites (AD) et (BE) et K le point d'intersection des droites (AD) et (CF).

a. Que représentent les droites (AD) et (BE) pour le triangle ABM ?
En déduire que les droites (HM) et (AB) sont perpendiculaires. Démontrer de même que les droites (KM) et (AC) sont perpendiculaires.

b. On appelle I le point d'intersection des droites (AB) et (MH).
On appelle J le point d'intersection des droites (AC) et (KM).
Démontrer que le quadrilatère AIMJ est un rectangle.
En déduire que le triangle HMK est rectangle.

Exercice 8. Pente d'une route

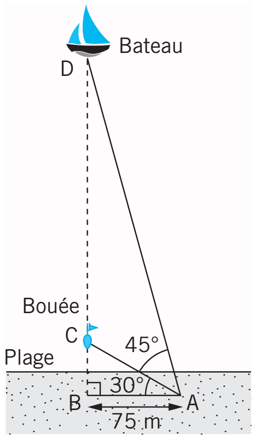
1. On dit qu'une route a une pente de 12 % si l'on s'élève de 12 m pour une distance horizontale de 100 m.
Quelle est ci-dessous la route la plus pentue ?



2. Comparer les résultats précédents à ceux qu'on aurait obtenus si on avait utilisé la définition suivante : on dit qu'une route a une pente de 12 %, si on s'élève de 12 m pour une distance parcourue de 100 m.

Exercice 9. Mesure par double visée

Donner une valeur approchée de la distance séparant la bouée du bateau ci-dessous.



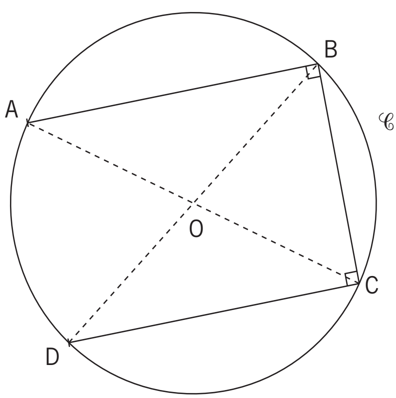
Exercice 10.

On considère un cercle $\mathscr{C}$ dont on ne connaît pas le centre. Pour déterminer ce centre, que l'on nomme O, on place les points A et B sur le cercle $\mathscr{C}$ puis, en utilisant uniquement une équerre non graduée, on construit les points C puis D (voir figure ci-contre).

1. Justifier que le point O obtenu par la construction proposée est bien le centre du cercle $\mathscr{C}$.

2. Prouver que le quadrilatère ABCD est un rectangle.

3. a. Reproduire la figure et construire le rectangle image du rectangle ABCD par la symétrie orthogonale d'axe (AC).
b. Démontrer que ce rectangle image de ABCD dans la symétrie orthogonale d'axe (AC) est inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$.



Exercice 11.

Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus. On appelle H l'orthocentre du triangle ABC, K le pied de la hauteur (AH) et O le centre du cercle ($\mathscr{C}$) circonscrit au triangle ABC.

1. Comment construire le point O, lorsque le triangle ABC est donné ? Faire une figure soignée à la règle non graduée et au compas.

2. On appelle D le point diamétralement opposé à A par rapport au cercle ($\mathscr{C}$). Que peut-on dire des triangles ABD et ACD ?

3. Quelle est la nature du quadrilatère HCDB ?

4. En déduire que [HD] et [BC] se coupent au milieu I de [BC].

5. Montrer que le symétrique de l'orthocentre par rapport au côté (BC) se trouve sur le cercle circonscrit ($\mathscr{C}$).

Exercice 12.

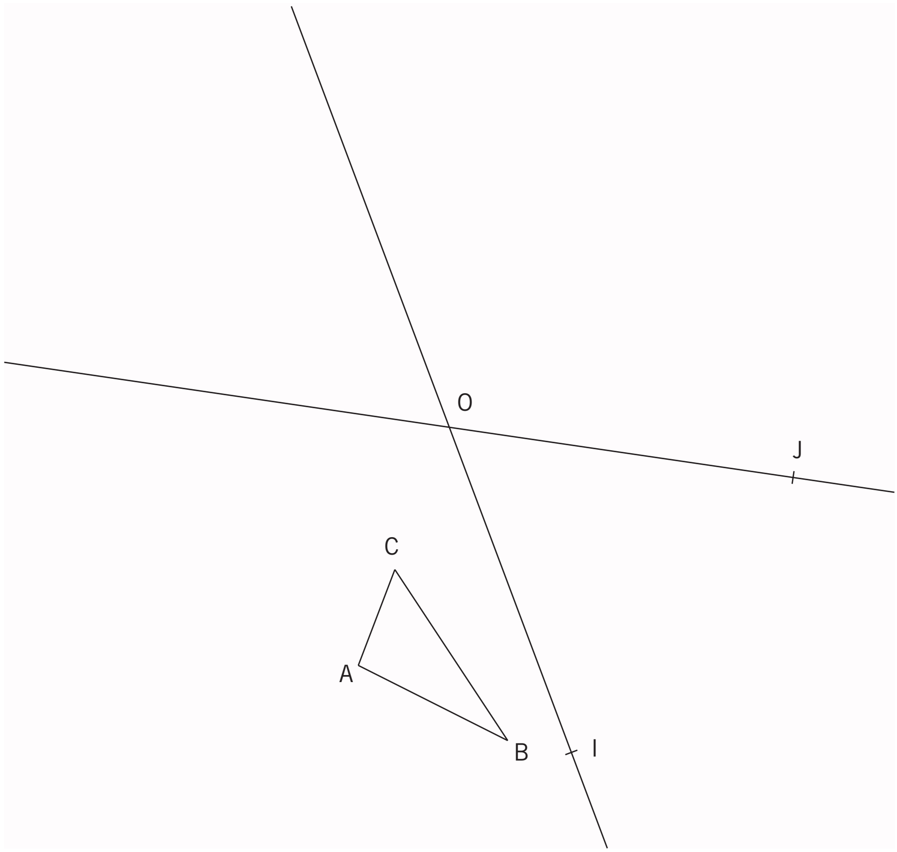
1. Tracer une figure ressemblant à celle ci-dessous. Il ne s'agit pas de reproduire exactement cette figure mais d'en respecter la forme et la disposition.
Construire à la règle et au compas les symétriques A', B' et C' des points A, B et C par rapport à la droite (OI) en laissant apparents les traits de construction.
Construire à la règle et au compas les symétriques A'', B'' et C'' des points A', B' et C' par rapport à la droite (OJ) en laissant apparents les traits de construction.

2. À partir de l'observation de la figure obtenue, donner un argument montrant qu'il n'existe pas de symétrie axiale qui transforme les trois points A, B et C en A'', B'' et C''.

3. Montrer que l'angle $\widehat{BOB''}$ vaut le double de l'angle $\widehat{IOJ}$.

4. Quelle est la transformation du plan qui transforme le triangle ABC en A''B''C'' ? Justifier la réponse.

THÈME 8


O
J
C
A
B
I

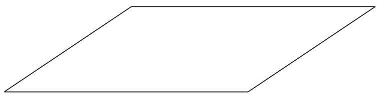
CORRIGÉS

Exercice 1.

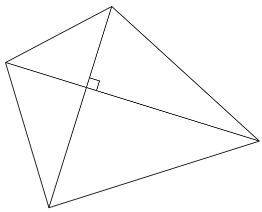
Le déterminant « un » utilisé en début de phrase est à comprendre au sens de « un quelconque » ou « tout ».

a. Vrai : un carré est un quadrilatère avec quatre côtés de même longueur, donc c'est un losange.

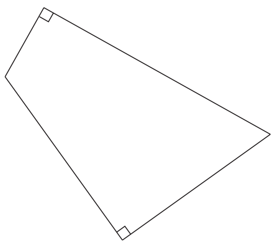
b. Faux : il existe des parallélogrammes qui ne sont pas des rectangles ; il suffit qu'un de ses angles ne soit pas droit (voir figure).



c. Faux : contre-exemple : il suffit de choisir un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires mais ne se coupent pas en leur milieu.



d. Faux : il peut s'agir d'un amandin.



e. Vrai : appelons ABCD le quadrilatère considéré et supposons que AB = BC = CD.

1^{er} cas : $\widehat{B} = \widehat{C} = 90°$.
On en déduit que (AB) // (CD). Les côtés AB et CD étant parallèles et de même longueur, ABCD est un parallélogramme ; par conséquent, AB = BC et ABCD est un losange. Un losange qui a un angle droit (donc *a fortiori* 2) est un carré.

2^e cas : $\widehat{A} = \widehat{B} = 90°$. On en déduit que (AD) // (BC). Les points C et B sont donc à la même distance de la droite (AD) ; or : « la distance d'un point M à une droite (d) est égale à la distance de M au pied de la perpendiculaire à (d) passant par M ». La distance de B à (AD) est donc égale à BA et comme BA = CD, on en déduit que (CD) ⊥ (AD). Par un raisonnement analogue à celui ci-dessus (cas 1), on démontre que ABCD est un carré.

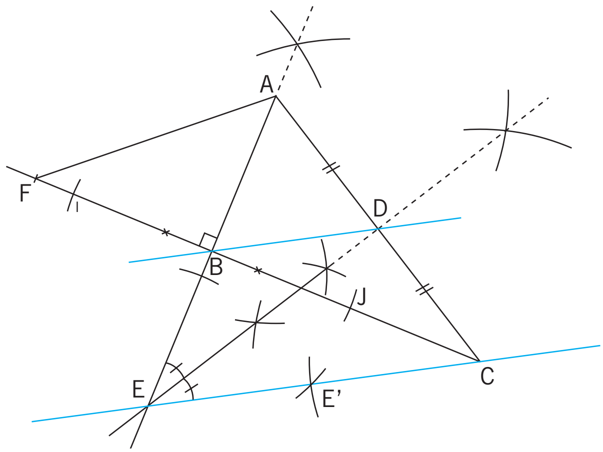
3^e cas : $\widehat{A} = \widehat{C} = 90°$. Les triangles ABD et CBD étant respectivement rectangles en A et C, d'après le théorème de Pythagore, on a : $AB^2 + AD^2 = BD^2$ et $BC^2 + CD^2 = BD^2$. Comme AB = CB, il découle des égalités précédentes que $AD^2 = CD^2$; AD et CD désignant des longueurs, donc des nombres positifs, on en déduit que AD = CD. Le quadrilatère ABCD est donc un losange qui a deux angles droits par hypothèse, c'est par conséquent un carré.

Les cas $\widehat{A} = \widehat{D} = 90°$, $\widehat{C} = \widehat{D} = 90°$ et $\widehat{B} = \widehat{D} = 90°$ se ramènent respectivement aux cas 1, 2 et 3 au nom des points près.

Exercice 2.

Il s'agit ici de décrire successivement les objets géométriques à tracer, sans entrer dans les détails des procédures de traçage. En revanche, les objets géométriques doivent être caractérisés de façon non ambiguë. Il est nécessaire de nommer les points particuliers de la figure (extrémités ou milieu de segments, centre de cercle, sommets de quadrilatères…), sinon les explications deviennent très opaques …

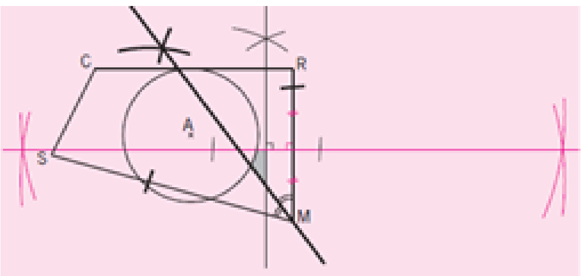
Voici un programme de construction possible :
– Tracer un triangle ABC rectangle en B.
– Construire le milieu D du segment [AC].
– Tracer la droite (BD).
– Tracer la droite parallèle à la droite (BD) et passant par C ; elle coupe (AB) en E.
– Placer un point F sur (BC) tel que F ∉ [BC] et tracer le segment [AF].
– Tracer la bissectrice de l'angle $\widehat{CEA}$.



Exercice 3.

– nommer le point R (1^er^ point d'intersection) ;
– nommer le point S (2^e^ point d'intersection).

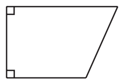
Reprenons les indications une à une.
« Le trésor se trouve à plus de 2 000 m de l'arbre centenaire ».
L'ensemble des points situés à moins 2 000 m de l'arbre est représenté par le disque de centre A et de rayon 2 cm ; les points de ce disque sont donc à exclure.
« Le trésor se trouve plus près de la maison que du rocher ».
L'ensemble des points équidistants de la maison et du rocher sont sur la médiatrice de [MR]. Les points du demi-plan délimité par cette médiatrice et contenant le point R sont à exclure.
« Le trésor se trouve plus près du chemin que de la rivière ».
La bissectrice de l'angle SMR est l'axe de symétrie de cet angle : tous les points situés sur cette bissectrice sont donc à la même distance de (MS) que de (MR) et représentent les lieux équidistants de la rivière et du chemin. La bissectrice et le segment [SM] délimitent la portion de plan à exclure.
« Le trésor se trouve à plus de 800 m du chemin. » L'ensemble de points situés à 800 m du chemin est représenté par deux droites parallèles à (RM) et distantes de 0,8 cm de (RM). Les points situés entres ces deux droites et à l'intérieur du quadrilatère MSCR sont à exclure (en fait, une seule des deux droites est à tracer, l'autre n'ayant pas de point d'intersection avec MSCR). Les explications quant au tracé de ces droites (médiatrice, bissectrice, parallèle à (RM)) se trouvent Fiche 33. La zone grisée correspond à l'endroit où le trésor peut se trouver. (La figure n'est pas représentée à l'échelle).



Exercice 4.

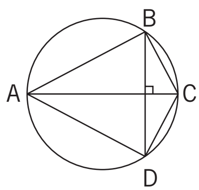
1. a. Vrai : un rectangle est un quadrilatère convexe et possède deux angles opposés droits, c'est donc un amandin.

b. Faux : contre-exemple le trapèze rectangle ci-contre ne possède pas deux angles opposés droits.



c. Vrai : les carrés sont des amandins (ils ont deux angles opposés droits) et sont aussi des losanges (ils ont quatre côtés de même longueur).

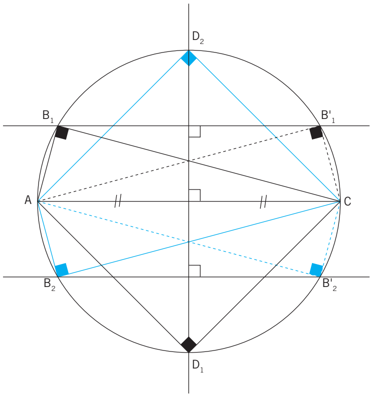
d. Faux : les diagonales [AC] et [BD] sont perpendiculaires ; le quadrilatère convexe ABCD est un amandin puisqu'il possède deux angles opposés droits (les triangles ABC et ADC sont rectangles en B et D car inscrits dans le cercle de diamètre [AC]).



ABCD n'est pas un losange car ses diagonales ne se coupent pas en leur milieu.

e. Vrai : soit ABCD un amandin tel que AC = BD. On peut supposer que les angles droits sont en B et D (le raisonnement ne serait pas changé si l'on supposait qu'ils sont en A et C). ABCD est alors inscrit dans le cercle de diamètre [AC]. La diagonale [BD] est une corde ayant même longueur que le diamètre [AC], donc [BD] est un diamètre du cercle. Les diagonales [AC] et [BD] se coupent en leur milieu et ont même longueur (diamètres du cercle), donc ABCD est un rectangle.

2. a. La figure n'est pas à l'échelle



L'amandin ABCD est inscrit dans le cercle de diamètre [AC] puisque les triangles ABC et ADC sont rectangles en B et D.
Le triangle ADC est isocèle en D car AC est l'hypoténuse du triangle rectangle ADC. Par conséquent, D est équidistant de A et C. D appartient donc à la médiatrice de [AC] : il y a deux positions possibles : D_1 et D_2.
B est situé à 2 cm de la droite (AC) dans le demi-plan limité par (AC) et ne contenant pas D. B se trouve donc sur la parallèle à (AC) située à 2 cm de (AC) dans ce même demi-plan. Pour chaque position de D, il y a deux positions possibles de B : B_1 et B'_1 correspondent à D_1 ; B_2 et B'_2 correspondent à D_2.
Il y a quatre solutions, symétriques par rapport à la médiatrice de [AC] et par rapport à (AC) : AB_1CD_1, AB'_1CD_1, AB_2CD_2 et AB'_2CD_2.
b. Dans le triangle ADC rectangle en D, le théorème de Pythagore permet d'écrire : $AD^2 + DC^2 = AC^2$. Or AD = DC, et AC = 6 cm, d'où :

$2 \times AD^2 = 6^2 \Leftrightarrow AD^2 = \dfrac{36}{2} \Leftrightarrow AD^2 = 18.$

Finalement : $AD = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ cm.
$AD \approx 4{,}2$ cm (valeur approchée au mm près).

Exercice 5.

Faites un schéma à main levée de la situation et complétez-le au fur et à mesure.

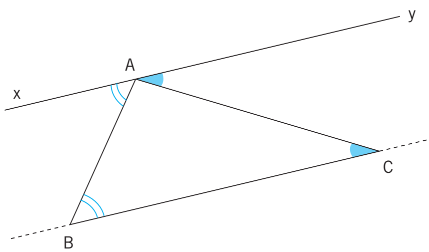
1. Calcul de la pente : $p = \dfrac{BB'}{AB'}$.
BB' = 2 620 – 2 100 = 520 m.
Calcul de AB' : le triangle ABB' est rectangle en B' ; d'après le théorème de Pythagore, on a $AB'^2 + BB'^2 = AB^2$ d'où $AB' = \sqrt{AB^2 - BB'^2} = \sqrt{2\,480^2 - 520^2} = \sqrt{5\,880\,000} = 1\,400\sqrt{3}$.

On en déduit : $p = \dfrac{520}{1\,400\sqrt{3}} = \dfrac{13}{35\sqrt{3}} \approx \dfrac{21{,}44}{100}$.
La pente est d'environ 21,44 %.

2. Le calcul de l'altitude au point C nécessite le calcul de CC'. Les droites (BB') et (CC') sont toutes deux perpendiculaires à la droite (AB'), donc elles sont parallèles. Par ailleurs, les droites (BC) et (B'C') sont sécantes en A. D'après le théorème de Thalès, on a donc :
$\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BB'}{CC'} = \dfrac{AB'}{AC'}$, d'où $\dfrac{2\,480}{AC} = \dfrac{520}{CC'}$.
Or AC = AB – CB = 2 480 – 480 = 2 000.
On a donc $CC' = \dfrac{520 \times 2\,000}{2\,480} = \dfrac{13\,000}{31}$.
L'altitude au point C est donc égale à $\dfrac{13\,000}{31} + 2\,100$, soit environ 2 519 mètres.

3. $EC = \dfrac{AC}{2} = 1\,000$ m.
$v = \dfrac{d}{t}$, *d* désignant la distance parcourue, *t* le temps du parcourt et *v* la vitesse moyenne.
On a donc $5 = \dfrac{1\,000}{t}$ d'où $t = \dfrac{1\,000}{t} = 200$ s $= (3 \times 60 + 20)$ s = 3 min 20 s. La cabine met 3 minutes et 20 secondes à parcourir la distance EC.

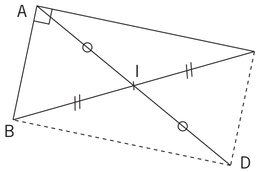
Exercice 6.



1. Appelons (*xy*) la droite parallèle à (BC) passant par A.
Les droites (*xy*) et (BC) sont parallèles donc les angles alternes-internes $\widehat{xAB}$ et $\widehat{CBA}$ d'une part, et $\widehat{yAC}$ et $\widehat{BCA}$ d'autre part sont égaux.
Le point A est sur (*xy*) donc l'angle $\widehat{xAy}$ est plat.
On a donc $\widehat{xAy} = 180°$ soit $\widehat{xAB} + \widehat{BAC} + \widehat{yAC} = 180°$ et $\widehat{CBA} + \widehat{BAC} + \widehat{BCA} = 180°$.
La somme des mesures des trois angles du triangle ABC vaut donc 180°.

2. Soit ABC un triangle rectangle en A.

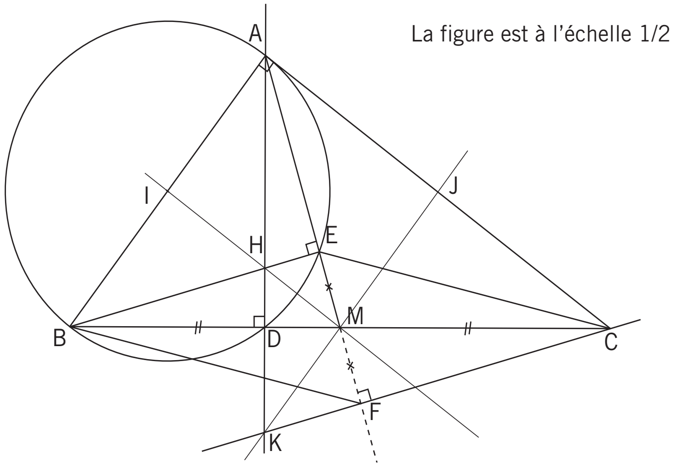
Plaçons I, le milieu du segment [BC], et construisons le point D tel que I soit le milieu de [AD], ainsi que le suggère l'énoncé.



Le quadrilatère ABCD a ses diagonales [AC] et [BD] qui se coupent en leur milieu ; c'est donc un parallélogramme.
Le parallélogramme ABCD a un angle droit (en A) ; c'est donc un rectangle.
Or un rectangle a des diagonales de même longueur ; on en déduit que AD = BC et comme I est le milieu commun à ces deux diagonales AI = CI = BI = DI. Les points A, B, C et D sont donc sur le cercle de centre I et de rayon BI.
En particulier : A est sur le cercle de diamètre [BC].

Exercice 7.

1. a. La figure ci-après est obtenue à la fin de l'exercice, en complétant au fur et à mesure la figure initiale.
b. $AC^2 = 12^2 = 144$; $BC^2 = 15^2 = 225$;
$AB^2 = 9^2 = 81$; $AC^2 + AB^2 = 144 + 81 = 225$
Donc $AC^2 + AB^2 = BC^2$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, on en déduit que le triangle ABC est rectangle en A.



2. b. Les points E et D sont sur le cercle de diamètre [AB]. Or « si le triangle RST est inscrit dans le demi-cercle de diamètre [RS] alors RST est un triangle rectangle en T. » (voir Fiche 48 § 4.3)
On en déduit que les triangles ABE et ABD sont respectivement rectangles en E et F.

3. b. On sait que M est le milieu de [BC] et M est le milieu de [EF].
Les diagonales du quadrilatère BECF se coupent donc en leur milieu.
Or « un quadrilatère est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales se coupent en leur milieu ». On en déduit que BECF est un parallélogramme.
c. BECF est un parallélogramme, donc ses côtés opposés sont parallèles. Par conséquent :
(BE) // (CF). Par ailleurs (AE) ⊥ (BE) car le triangle AEB est rectangle en E (question 2. b). Or les points A, E, M et F sont alignés ; donc (AF) ⊥ (BE).
Les droites (BE) et (CF) étant parallèles, toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre : (AF) est perpendiculaire à (BE), donc (AF) est perpendiculaire à (CF).

4. a. (AD) est perpendiculaire à (BM) car le triangle ADB est rectangle en D ; de plus B, D et M sont alignés. La droite (AD) est donc la hauteur issue de A dans le triangle AMB.
De même, la droite (BE) est perpendiculaire à la droite (AE) car AEB est rectangle en E et comme M est sur la droite (AE), (BE) est perpendiculaire à (AM) : la droite (BE) représente la hauteur issue de B dans le triangle AMB.
Ces deux hauteurs se coupent en H, par hypothèse. On en déduit que (MH) est la troisième hauteur du triangle AMB et donc que (MH) ⊥ (AB).
On fait un raisonnement analogue au précédent en se plaçant dans le triangle AKC :
(AF) ⊥ (CF) d'après la question 3 et K est sur (CF) donc (AF) est la hauteur issue de A dans le triangle AKC.

(BD) $\perp$ (AD) (d'après la question 2. b) et C est sur (BD) et K sur (AD) donc (DC) $\perp$ (AK) : (CD) est la hauteur issue de C dans le triangle AKC. Les hauteurs (CD) et (AF) se coupent en M, donc (KM) est la 3e hauteur dans le triangle AKC ; on en déduit que (KM) $\perp$ (AC).

b. (MH) $\perp$ (AB) d'après la question précédente et I est le point d'intersection de (MH) et (AB), donc (MI) $\perp$ (AB).

(KM) $\perp$ (AC) d'après la question précédente et J est le point d'intersection de (KM) et (AC), donc (MJ) $\perp$ (AC).

Le triangle ABC est rectangle en A (d'après la question 1. b) donc (AC) $\perp$ (AB) ; par conséquent (AJ) $\perp$ (AI).

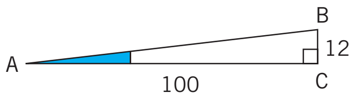
Le quadrilatère AJMI a trois angles droits, donc c'est un rectangle.

Par conséquent, (IM) $\perp$ (MJ). Or K $\in$ (MJ) et H $\in$ (MI) donc : (KM) $\perp$ (MH).

Le triangle HMK est donc rectangle en M.

Exercice 8.

1. Calculons l'angle correspondant au premier panneau 12 %. Schématisons l'énoncé :



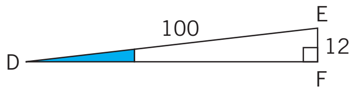
Dans le triangle ABC rectangle en C, on a :

$$\tan \widehat{BAC} = \frac{12}{100} = 0{,}12 \ ;$$

d'où $\widehat{BAC} \approx 6{,}84°$ (on utilise la touche « $\tan^{-1}$ ».

$6{,}84° < 12°$. On en conclut que la route la plus pentue est celle du panneau 12°.

2. Calculons l'angle correspondant à cette deuxième définition.



Dans le triangle DEF rectangle en F :

$$\sin \widehat{EDF} = \frac{12}{100} = 0{,}12 \ ;$$

d'où $\widehat{EDF} \approx 6{,}89°$.

On constate qu'on obtient un angle proche de celui de la question précédente (pour des petits angles, on peut utiliser l'une ou l'autre des définitions).

Exercice 9.

– Dans le triangle ABC rectangle en B :

$$\tan 30° = \frac{BC}{AB} = \frac{BC}{75} \ ;$$

d'où $BC = 75 \times \tan 30°$.

– Dans le triangle DAB rectangle en B :

$$\tan 75° = \frac{DB}{AB} = \frac{DB}{75} \ ;$$

d'où $DB = 75 \times \tan 75°$.

– Les points B, C et D étant alignés dans cet ordre on a : $BC + CD = BD$; soit

$CD = BD - BC = 75\,(\tan 75° - \tan 30°) \approx 237$.

La distance de la bouée au bateau est d'environ 237 m (valeur arrondie au m près).

Exercice 10.

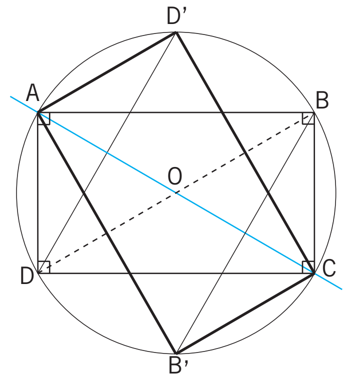
1. Justification : le point O est bien le centre du cercle $\mathscr{C}$.

Les triangles ABC et BCD sont rectangles respectivement en B et C et inscriptibles dans le cercle initial. Donc les hypoténuses [AC] et [BD], diamètres du cercle, ont même milieu : le centre du cercle.

2. Les diagonales du quadrilatère ABCD se coupent en leur milieu commun O, d'après la question 1. ABCD est donc un parallélogramme ; comme il possède un angle droit (en B par exemple), c'est un rectangle.

Autre démonstration : les diagonales [AC] et [BD] ont même longueur car ce sont des diamètres du cercle $\mathscr{C}$ donc ABCD est un rectangle.

3. a.



b. Démontrons que le rectangle image de ABCD dans la symétrie orthogonale d'axe (AC) est inscrit dans le cercle initial.

Par la symétrie d'axe (AC), A et C sont invariants. Appelons B' et D' les images respectives de B et D et montrons que B' et D' sont sur $\mathscr{C}$.

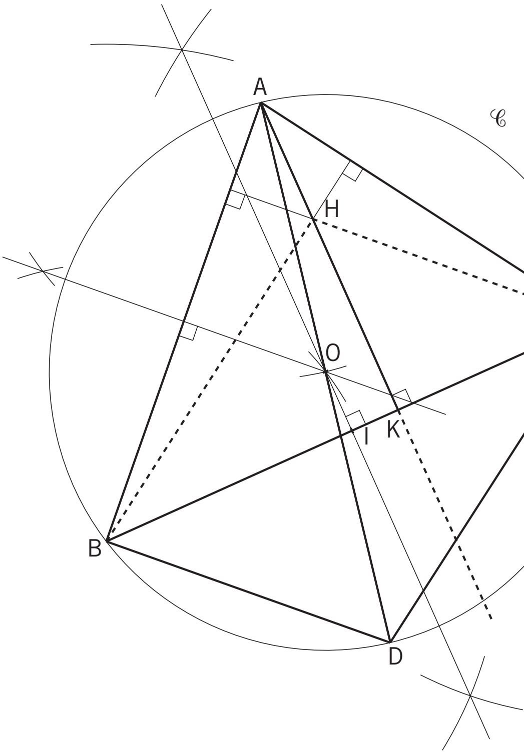
1re démonstration : O est invariant par la symétrie d'axe (AC) car O est sur (AC). Par conservation des longueurs, on a $OD' = OD$ et $OB' = OB$. Or [OB] et [OD] sont deux rayons du cercle $\mathscr{C}$. Donc D' et B' sont sur $\mathscr{C}$ et puisque A

et C sont déjà sur le cercle, le rectangle AB'CD' est inscrit dans le cercle.
2e démonstration : Le rectangle AB'CD' a pour diagonale [AC], diamètre du cercle initial. Les angles en B' et D' sont droits donc les points B' et D' sont situés sur le cercle de diamètre [AC] c'est-à-dire sur le cercle initial.

Exercice 11.

1. Le triangle ABC étant donné, on obtient O en traçant les médiatrices de deux côtés du triangle ABC, par exemple les médiatrices des côtés [BC] et [AB] (voir figure ci-après).

2. [AD] étant un diamètre du cercle ($\mathscr{C}$) et B et C étant deux points de ce cercle, les triangles ABD et ACD sont rectangles respectivement en B et C.



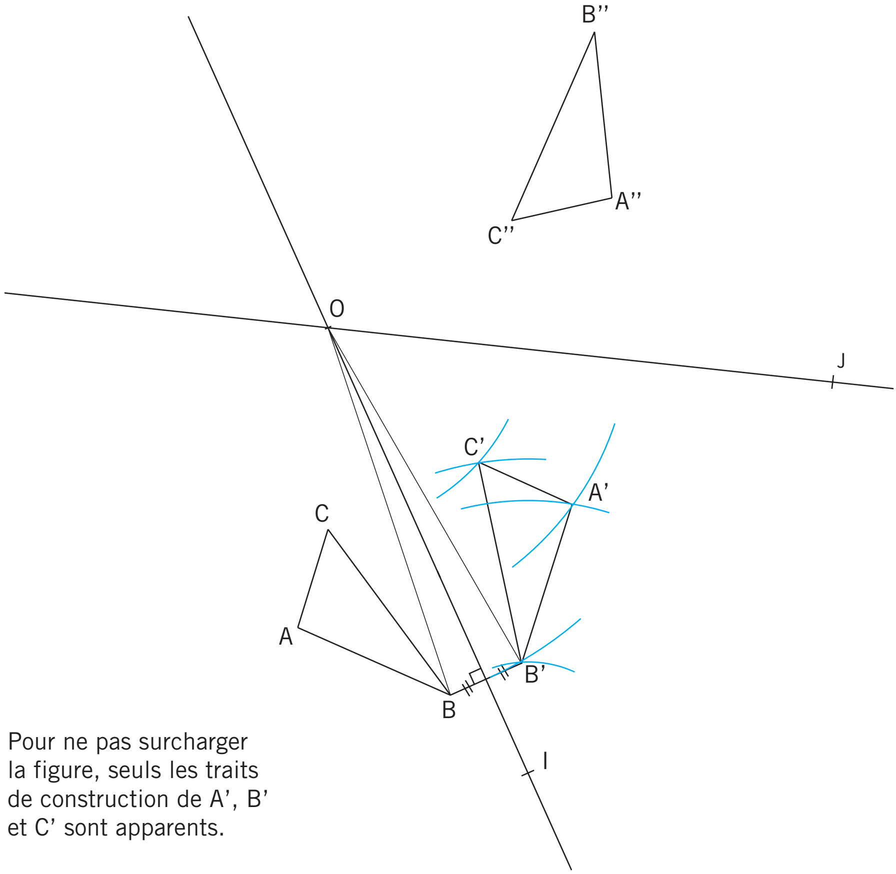
3. Le triangle ACD est rectangle en C donc (DC) ⊥ (AC).
(BH) est une hauteur de ABC, donc (BH) ⊥ (AC).
On en déduit que (BH) // (CD).
De même, le triangle ABD est rectangle en B donc (DB) ⊥ (AB).
(CH) est une hauteur de ABC, donc (CH) ⊥ (AB).
On en déduit que (CH) // (BD).
Le quadrilatère HCDB a ses côtés opposés parallèles deux à deux, c'est donc un parallélogramme.

4. Les diagonales d'un parallélogramme se coupant en leur milieu, on déduit de la question précédente que [HD] et [BC] se coupent en leur milieu, appelé I.

5. Appelons H' le symétrique de l'orthocentre H par rapport à (BC) et montrons que H' est sur ($\mathscr{C}$).
K est le pied de la hauteur (AH) donc K est le point d'intersection de (BC) et de la perpendiculaire à (BC) passant par H ; on en déduit que K est le milieu de [HH'].
Dans le triangle HH'D :
– K est le milieu de [HH'] ;
– I est le milieu de [HD] d'après la question 4.
D'après la propriété de la droite des milieux, on en déduit que la droite (IK) est parallèle au côté [H'D]. Or (BC) – et donc (IK) – est perpendiculaire (HH'), donc (H'D) est perpendiculaire à (HH').
Le triangle AH'D est rectangle en H', il est donc inscrit dans le cercle de diamètre [AD], à savoir ($\mathscr{C}$). H' est donc sur ($\mathscr{C}$).

Exercice 12.

1.



Pour ne pas surcharger la figure, seuls les traits de construction de A', B' et C' sont apparents.

2. Il n'existe pas de symétrie axiale qui transforme A, B, C respectivement en A'', B'' et C'' car les droites (AA'') et (BB'') sont sécantes, alors que dans le cas d'une symétrie axiale, elles seraient parallèles car toutes deux perpendiculaires à l'axe.

3. $\widehat{BOB''} = \widehat{BOI} + \widehat{IOJ} + \widehat{JOB}$ (1)

Or :

– $\widehat{BOI} = \widehat{IOB'}$ car B' est l'image de B par la symétrie d'axe (OI) ;

– $\widehat{B'OJ} = \widehat{JOB''}$ car B'' est l'image de B' par la symétrie d'axe (OJ).

On déduit donc de (1) que $\widehat{BOB''}$ $= \widehat{IOB'} + \widehat{IOJ} + \widehat{B'OJ} = 2\,\widehat{IOJ}$.

4. D'une part $\widehat{BOB''} = 2\,\widehat{IOJ}$ d'après la question 2. D'autre part BO = B''O car BO = BO' (conservation des longueurs dans la symétrie d'axe (OI)) et B'O = B''O (conservation des longueurs dans la symétrie d'axe (OJ)).
B'' est donc l'image de B par la rotation de centre O et d'angle $2 \times (\mathrm{OI}, \mathrm{OJ})$.
On montre par un raisonnement analogue que A'' et C'' sont respectivement les images de A et C par cette même rotation.
A''B''C'' est donc l'image de ABC par la rotation de centre O et d'angle $2 \times (\mathrm{OI}, \mathrm{OJ})$.

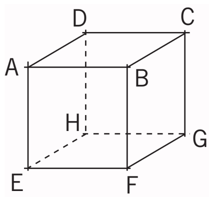
THÈME 8

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

9 THÈME

Exercice 1.

Voici la représentation en perspective cavalière d'un cube ABCDEFGH.



Pour chacune des affirmations suivantes, dites si elle est vraie ou fausse.

a. Les droites (AB) et (DC) sont parallèles.
b. Les droites (BC) et (EH) sont parallèles.
c. Les droites (AD) et (BF) sont parallèles.
d. Les droites (AC) et (HF) sont parallèles.
e. Les droites (DB) et (HF) sont parallèles.
f. Les droites (DH) et (DC) sont perpendiculaires.
g. Les droites (AC) et (AE) sont perpendiculaires.
h. Les droites (AB) et (BD) sont perpendiculaires.
i. Les droites (DH) et (AC) sont perpendiculaires.
j. Si M est le milieu d'une arête du cube alors M est le milieu de l'arête correspondante de la représentation en perspective cavalière.

Exercice 2.

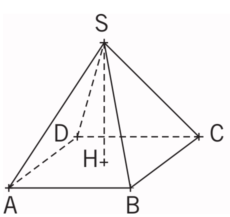
On considère le même cube que dans la question 1 précédente. Complétez le tableau ci-dessous par « oui » ou par « non ».

Le triangle… est …	ABE	CBF	DGE	DHF	CDH	AGH	CHE	AFH	CEG	CHA
rectangle										
isocèle										
équilatéral										

Exercice 3.

La pyramide ci-dessous est régulière à base carrée ; ses faces latérales sont des triangles équilatéraux de 6 cm de côté. Le segment [SH] est sa hauteur.

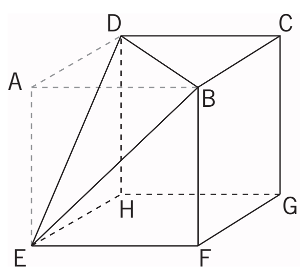
a. Sans effectuer de calcul, représentez le triangle AHS en vraie grandeur.



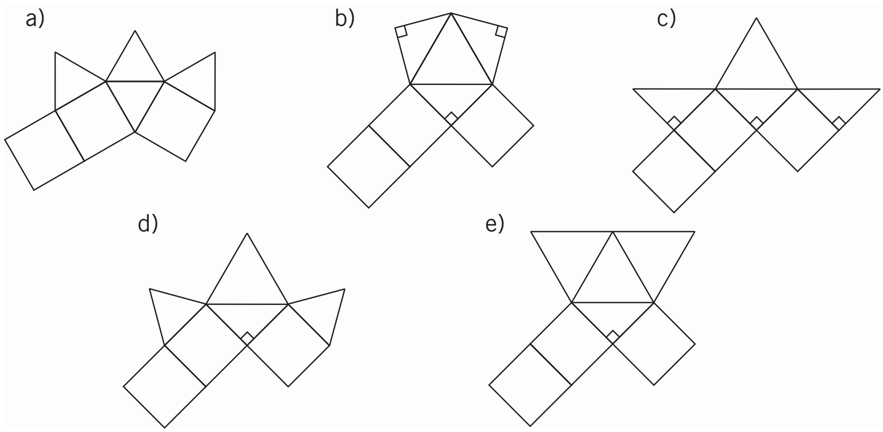
b. Calculez la hauteur SH.
c. Indiquez la nature du triangle ASC. Justifiez votre réponse.
d. Calculez le volume de la pyramide (on donnera la valeur exacte et une valeur approchée au mm^3 près).

Exercice 4.

On considère le solide DCBEFGH obtenu en coupant le cube ABCDEFGH selon le plan EDB.

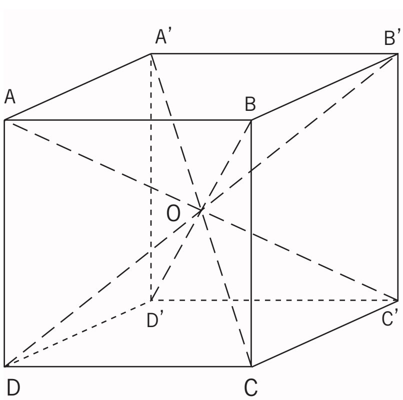


Parmi les patrons ci-dessous, indiquer ceux qui correspondent au solide DCBEFGH.



Exercice 5.

ABB'A'DCC'D' est un cube.
Chacune de ses arêtes mesure 4 cm.
Le point O est le centre de ce cube.

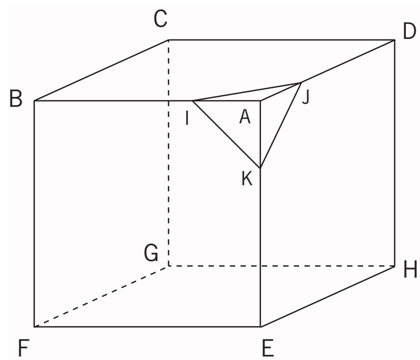


1. Dessiner en vraie grandeur un patron de la pyramide OABB'A'. (Préciser les longueurs des segments tracés).

2. Sans utiliser de formule de calcul de volume autre que celle qui donne le volume d'un cube, calculer le volume de la pyramide OABB'A'. (En donner une valeur approchée au mm^3 près).

Exercice 6.

On considère le cube ABCDEFGH de 8 cm d'arête. Les points I, J et K désignent respectivement un point de chacune des arêtes [BA], [AD] et [AF].



On découpe le cube ABCDEFGH selon le plan IJK, puis on détache le tétraèdre AIJK du cube.

1. Représenter à main levée ce tétraèdre et un de ses patrons.

2. On se propose d'étudier le volume du tétraèdre AIJK.
On pose AI = AJ = AK = x avec $0 \leq x \leq 4$.
Calculer le volume V(x) du tétraèdre AIJK en fonction de x.

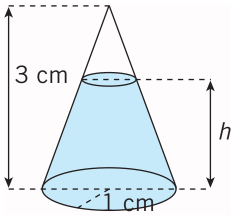
3. Sachant que x est compris entre 0 et 4, donner la plus grande valeur que peut prendre V(x). Justifier la réponse.

Exercice 7.

Un ballon (sphérique) de 36 cm de diamètre flotte sur l'eau. Il est immergé aux 5/6 de sa hauteur. Quel est le rayon du cercle de contact du ballon avec la surface de l'eau ?

Exercice 8.

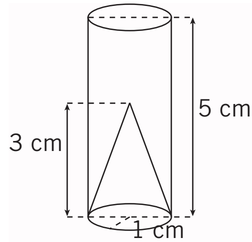
1. On considère dans un cône dont le rayon de la base est 1 cm et dont la hauteur est 3 cm, un tronc de cône de hauteur h (solide couleur).



On note $V(h)$ le volume de ce tronc de cône. Montrer que :

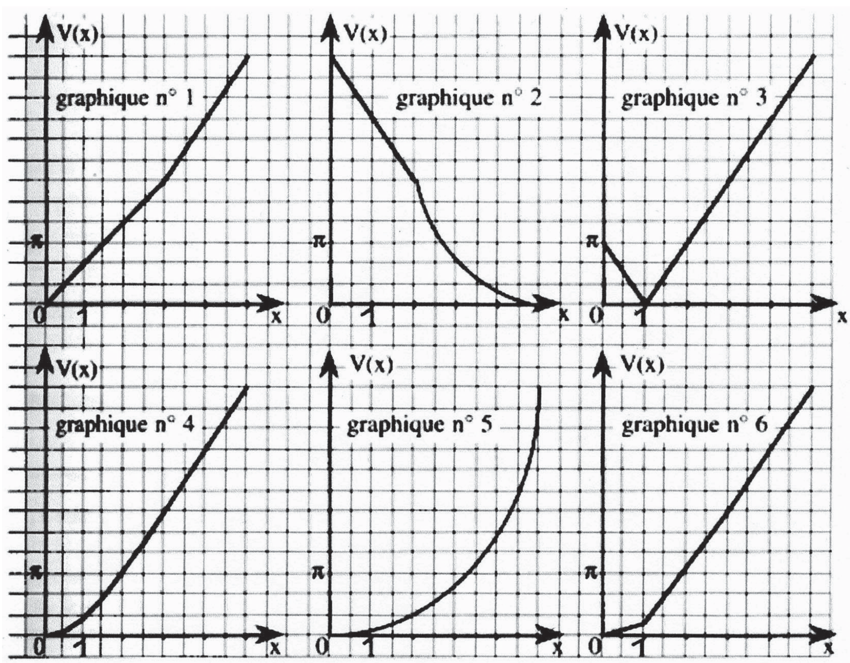
$$V(h) = \frac{\pi \times h}{27} \times (h^2 - 9\,h + 27).$$

2. On considère un récipient cylindrique dont le fond est de forme conique et dont les dimensions sont indiquées sur la figure ci-dessous (échelle 1/2).



On verse un liquide dans ce récipient et on s'intéresse au volume occupé par ce liquide selon sa hauteur dans le récipient.

a. Soit x la hauteur du liquide dans le récipient ; calculer le volume $V(x)$ du liquide en fonction de x, pour x compris entre 0 et 5 cm.
Distinguer deux cas : x compris entre 0 et 3 cm, et x compris entre 3 et 5 cm.
b. Parmi les six graphiques ci-après, lequel représente le volume $V(x)$ en fonction des valeurs à l'unité de x ? Pourquoi les cinq autres ne sont-ils pas convenables ?



CORRIGÉS

Exercice 1.

Ce type de questions portent sur l'objet réel tridimensionnel (le cube) et non sur le dessin bidimensionnel (la trace graphique) qui permet « seulement » de se représenter le cube nommé dans l'énoncé.

a. Vrai : les droites (AB) et (DC) sont parallèles.

b. Vrai : les droites (BC) et (EH) sont parallèles (deux droites de l'espace sont parallèles si elles sont dans le même plan et si elles sont parallèles dans ce plan) .

c. Faux : les droites (AD) et (BF) ne sont pas parallèles, mais orthogonales.

d. Faux : les droites (AC) et (HF) ne sont pas parallèles, mais orthogonales.

e. e) Vrai : les droites (DB) et (HF) sont parallèles.

f. Vrai : les droites (DH) et (DC) sont perpendiculaires.

g. Vrai : les droites (AC) et (AE) sont perpendiculaires (si une droite est perpendiculaire en un point à deux droites sécantes d'un plan alors elle est perpendiculaire à toutes les droites du plan passant par ce point. Ici, (AE) $\perp$ (AD) et (AE) $\perp$ (AB) donc (AE) $\perp$ (AC)).

h. Faux : les droites (AB) et (BD) ne sont pas perpendiculaires : $\widehat{ABD} = 45°$.

i. Faux : les droites (DH) et (AC) ne sont pas coplanaires (elles n'appartiennent pas au même plan). En revanche, (DH) // (AE) et d'après la question précédente, (AE) $\perp$ (AC) ; les droites (DH) et (AC) sont donc orthogonales (voir fiche 66).

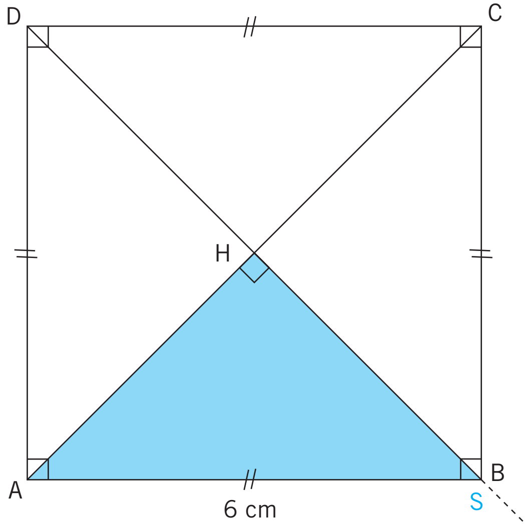
j. Vrai : si M est le milieu d'une arête du cube alors M est le milieu de l'arête correspondante sur la représentation en perspective cavalière (dans la perspective cavalière le milieu des arêtes est conservé).

Exercice 2.

Le triangle… est …	ABE	CBF	DGE	DHF	CDH	AGH	CHE	AFH	CEG	CHA
rectangle	Oui	Oui	*Non*	Oui	Oui	Oui	Oui	*Non*	Oui	*Non*
isocèle	Oui	Oui	Oui	*Non*	Oui	*Non*	*Non*	Oui	*Non*	Oui
équilatéral	*Non*	*Non*	Oui	*Non*	*Non*	*Non*	*Non*	Oui	*Non*	Oui

Exercice 3.

a



Le triangle AHS est rectangle en H. Pour le représenter, on trace le carré ABCD de 6 cm de côté. Ses diagonales se coupent en H et sont perpendiculaires. Le côté [AH] est représenté. Le point S est un point de la demi-droite [HB) tel que la longueur AS soit égale à 6 cm ; le point S est donc confondu avec le point B. Le triangle AHS est superposable au triangle AHB : il est rectangle et isocèle en H.
Remarque : on aurait pu raisonner de même en utilisant le triangle AHD.

b. La diagonale d'un carré de *a* cm de côté mesure $a\sqrt{2}$ cm (formule qui peut être retrouvée grâce au théorème de Pythagore), donc AC = $6\sqrt{2}$ cm. Les diagonales d'un carré se coupent en leur milieu d'où AH = $3\sqrt{2}$ cm. Le triangle AHS étant isocèle en H, HS = AH = $3\sqrt{2}$ cm.

c. Le triangle ASC est isocèle en S car AS = SC = 6 cm.
Voyons s'il est aussi rectangle en S.

$AC^2 = (6\sqrt{2})^2 = 36 \times 2 = 72$
$AS^2 = 36$ et $SC^2 = 36$ donc $AS^2 + SC^2 = 72$ et $AC^2 = AS^2 + SC^2$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ASC est rectangle en S.
Le triangle ASC est donc isocèle et rectangle en S.

d. Volume V de la pyramide :

$V = \frac{1}{3} \times AB^2 \times SH = \frac{1}{3} \times 6^2 \times 3\sqrt{2}$

$= 36\sqrt{2}\ \text{cm}^3 \approx 50{,}912\ \text{cm}^3$ (ou $50{,}911\ \text{cm}^3$).

Exercice 4.

Le polyèdre DCBEFGH possède 7 faces :
– 3 faces sont des carrés : BCGF, DCGH et EFGH ;
– 3 faces sont des triangles rectangles et isocèles (demi-carrés) : BCD, BEF et DEH ;
– une face est un triangle équilatéral (les côtés de même longueur sont des demi-diagonales d'une face carrée) : ABD.
On peut donc éliminer les patrons *a*, *d* et *e* ne contenant pas 3 triangles rectangles et isocèles (les angles droits sont codés sur les patrons proposés).
Les patrons *b* et *c* correspondent au solide DCBEFGH (nature des faces et disposition de celles-ci cohérentes avec le dessin en perspective).

Exercice 5.

1. Le patron de la pyramide OABB'A' à base carrée est constitué :
– du carré ABB'A'de 4 cm de côté ;
– des quatre triangles isocèles isométriques AOB, BOB', B'OA' et AOA'.
Ces triangles ont une base de 4 cm (côté du carré) et la longueur des deux autres côtés qui est égale à OA', soit la moitié de la diagonale A'C du rectangle A'BCD'.

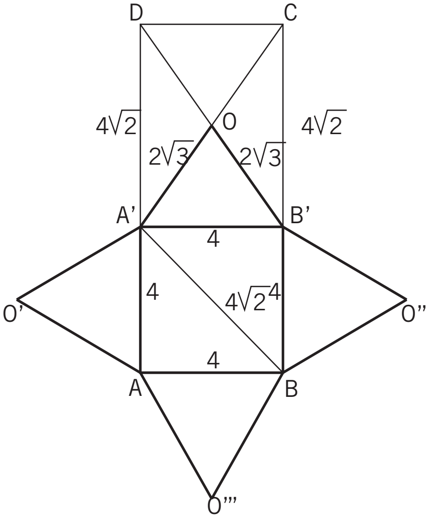
La longueur A'B est égale à $4\sqrt{2}$ cm (diagonale d'un carré de 4 cm de côté). Appliquons le théorème de Pythagore au triangle A'BC rectangle en B :

$A'C^2 = A'B^2 + BC^2 = (4\sqrt{2})^2 + 4^2 = 48.$

D'où $A'C = \sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = 4\sqrt{3}$ cm et

$A'O = \frac{A'C}{2} = 2\sqrt{3}$ cm.

Programme de construction du patron (non demandé dans l'énoncé) :
– construire un carré A'B'BA de 4 cm de côté ;
– sur la demi-droite [BB') marquer le point C tel que B'C $= $ A'B $= 4\sqrt{2}$ cm (on reporte au compas la longueur A'B) ;
– sur la demi-droite [AA') marquer le point D tel que A'D = A'B $= 4\sqrt{2}$ cm ;
– tracer les segments [A'C] et [B'D], ils se coupent en O (on obtient la face A'B'O) ;
– tracer les 3 autres triangles isocèles isométriques à A'B'O.

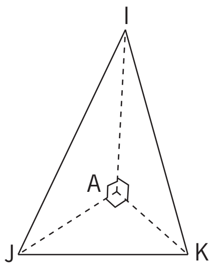


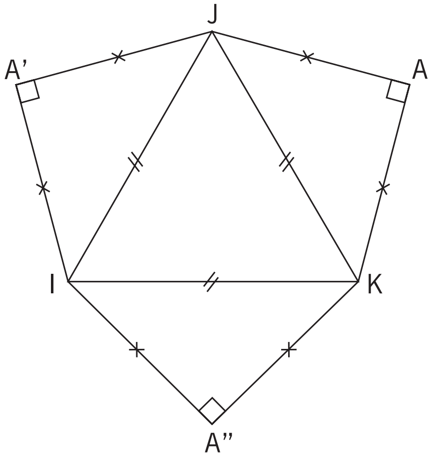
2. Le cube de volume V contient 6 pyramides isométriques (chacune d'elles a pour base une des faces du cube) ; elles ont le même volume V'.

D'où V' $= \dfrac{V}{6} = \dfrac{4^3}{6} = \dfrac{64}{6} \approx 10{,}666$ cm^3.

Exercice 6.

1.





2. Si l'on considère le triangle AIJ rectangle en A comme la base du tétraèdre AIJK, la hauteur correspondante est [AK] car l'arête [AF] est orthogonale au plan (AIJ). D'où $V(x) = \dfrac{1}{3}$ AK $\times$ Aire (AIJ) $= \dfrac{1}{3} \times x \times \dfrac{x^2}{2} = \dfrac{1}{6}x^3$ cm^3.

3. Calcul de la plus grande valeur de $V(x)$: la fonction qui à x associe son volume $\left(x \mapsto \dfrac{1}{6}x^3\right)$ est croissante sur l'intervalle [0 ; 4] donc $V(x)$ atteint sa plus grande valeur pour $x = 4$.

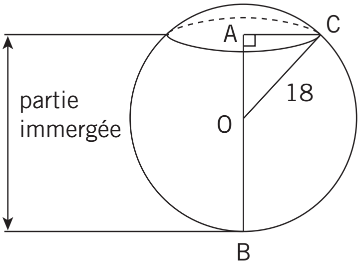
La plus grande valeur de $V(x)$ est $V(4) = \dfrac{1}{6} \times 4^3 = \dfrac{32}{3}$ cm^3.

Exercice 7.

Représentons le ballon par une sphère S de centre O. Le cercle de contact du ballon avec la surface de l'eau est représenté par la section de S par un plan. Soit A le centre du cercle $\mathscr{C}$ de section et C un point de $\mathscr{C}$:

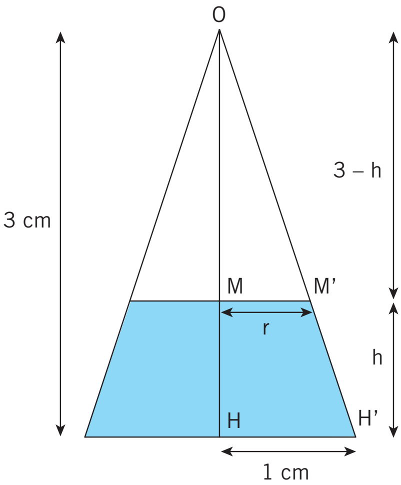
BA $= \dfrac{5}{6} \times 36 = 30$ cm, d'où :
OA = 30 – 18 = 12 cm.
OC = 18 cm car C est un point de la sphère.
D'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle OAC rectangle en A : $OC^2 = OA^2 + AC^2$,

d'où $AC^2 = OC^2 - OA^2 = 18^2 - 12^2 = 180$ et AC $= \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$ cm $\simeq 13{,}4$ cm



Exercice 8.

1. Calculons le rayon r du disque supérieur du tronc de cône (à la hauteur h).



On considère une coupe dans un plan vertical contenant l'axe du cône (voir figure ci-dessus). Le théorème de Thalès permet d'écrire :

$\frac{OM}{OH} = \frac{MM'}{HH'}$ d'où $\frac{3-h}{3} = \frac{r}{1}$ et $r = \frac{1}{3} \times (3-h)$

V(h) = volume du cône complet – volume du cône de hauteur OM (= 3 – h), d'où

$$V(h) = \frac{1}{3}\pi \times 1^2 \times 3 - \frac{1}{3}\pi \times r^2 \times (3-h)$$

$$V(h) = \frac{1}{3}\pi \times 1^2 \times 3 - \frac{1}{3}\pi \times \left(\frac{3-h}{3}\right)^2 \times (3-h)$$

$$V(h) = \pi - \frac{1}{27}\pi \times (3-h)^3$$

$$V(h) = \pi - \frac{1}{27}\pi \times (3-h)^2 \times (3-h)$$

$$V(h) = \pi - \frac{1}{27}\pi \times (9 + h^2 - 6h) \times (3-h)$$

$$V(h) = \pi - \frac{1}{27}\pi \times (27 - 9h + 3h^2 - h^3 - 18h + 6h^2)$$

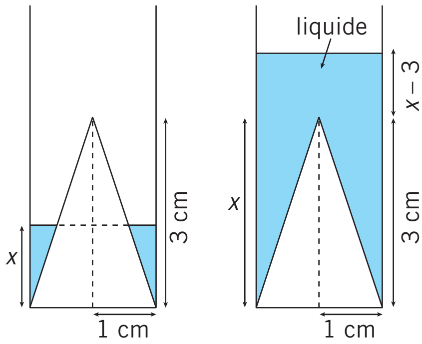
$$V(h) = \pi - \frac{1}{27}\pi \times (27 - 27h + 9h^2 - h^3)$$

$$V(h) = \pi - \pi + \frac{27\pi \times h}{27} - \frac{9}{27}\pi \times h^2 + \frac{\pi \times h^3}{27}$$

$$V(h) = \frac{\pi \times h}{27} \times (h^2 - 9h + 27).$$

2. Coupe des récipients selon un plan vertical contenant l'axe du cône :

Figure 1 Figure 2



a. Premier cas : x compris entre 0 et 3 cm (figure 1)

V(x) = volume du cylindre de hauteur x – volume du tronc de cône de hauteur x

$V(x) = \pi \times 1^2 \times x - \frac{\pi \times x}{27} \times (x^2 - 9x + 27)$ (on utilise la formule précédente)

$V(x) = \frac{\pi \times x}{27}(27 - (x^2 - 9x + 27)) = \frac{\pi \times x}{27}(-x^2 + 9x)$ cm^3.

Remarque : pour $x = 3$ cm, le volume de liquide est égal à :

$$V(3) = \frac{\pi \times 3}{27}(-3^2 + 9 \times 3) = 2\pi \text{ cm}^3$$

Deuxième cas : x compris entre 3 et 5 (figure 2)

V(x) = V(3) + volume du cylindre de hauteur $(x - 3)$

$V(x) = 2\pi + \pi \times 1^2 \times (x-3) = \pi(x-1)$ cm^3.

b. Sur l'intervalle [0, 3] la fonction V(x) est un polynôme du troisième degré ; sa représentation graphique ne contient pas de segment de droite. Cette propriété permet d'éliminer les graphiques 1, 2, 3 et 6.

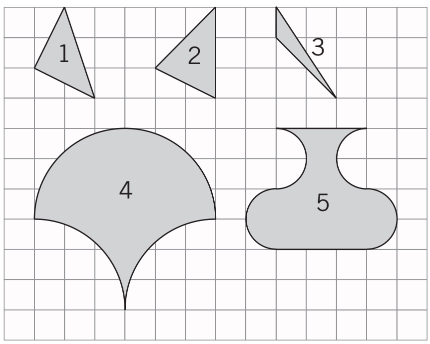
Sur l'intervalle [3, 5] la fonction V(x) est une fonction affine (fonction du type $x \mapsto ax + b$ avec $a = \pi$ et $b = -\pi$), sa représentation graphique est un segment de droite. Cette propriété permet d'éliminer les graphiques 2 et 5.

Sur tout son domaine (intervalle [0, 5]) la fonction est croissante (plus la hauteur de liquide

est grande, plus le volume du liquide est grand). Cette propriété permet d'éliminer les graphiques 2 et 3.
$V(3) = 2\pi$: cette valeur permet d'éliminer le graphique 2 et le graphique 5.
$V(0) = 0$: cette valeur permet d'éliminer le graphique 2 et le graphique 3.
En résumé : tous les graphiques ont été éliminés au moins une fois, sauf le graphique n° 4 qui possède toutes les propriétés nécessaires.

GRANDEURS ET MESURES

Exercice 1.
Indiquer la mesure de l'aire de chacune des surfaces (l'unité est le carreau).



Exercice 2.
ABC est un triangle rectangle en A tel que AB = 6 cm et AC = 8 cm. Calculer la longueur de la hauteur h relative à l'hypoténuse.

Exercice 3.

1. Dessiner un triangle ABC. Sur la demi-droite [BA), placer un point E n'appartenant pas au segment [AB] tel que AE = AC. Sur la médiatrice du segment [CE], placer un point M.

2. Démontrer que le périmètre du triangle MBC est supérieur à celui du triangle ABC.

Exercice 4.

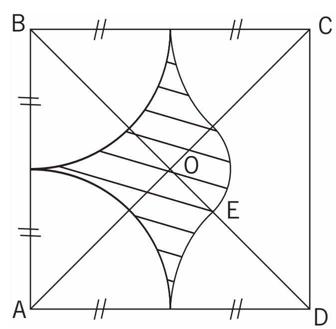
Une allée de 3 m de large entoure une pelouse circulaire de 12 m de rayon. On répand du gravier sur cette allée. Quelle sera la somme à payer pour le gravier, sachant qu'un mètre carré recouvert revient à 7,25 € ?

Exercice 5.
On dispose d'une feuille de papier rectangulaire de 29 cm de longueur sur 10 cm de largeur. Avec cette feuille, on veut construire un cylindre de 10 cm de hauteur, sans couvercle. On ne fait pas de pâte de collage. Le disque servant de base du cylindre doit être le plus grand possible. On découpe donc deux morceaux, le fond et la surface latérale, dans la bande de papier proposée.

1. Calculer le diamètre du fond du cylindre ainsi obtenu.

2. Dessiner à l'échelle 1/2, au mm près, la bande de papier initiale, en traçant dessus les 2 parties du cylindre désiré.

Exercice 6.
ABCD est un carré dont le côté mesure 10 cm.
Calculer l'aire de la surface hachurée.

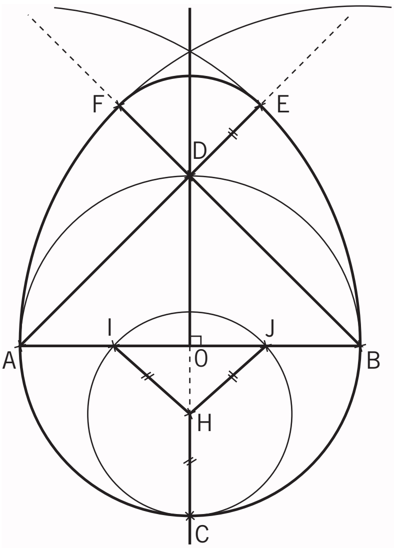


Exercice 7.
On a représenté ci-dessous un puzzle de 9 pièces en forme d'œuf obtenu à partir d'un cercle de centre O et de rayon OB. Cette figure n'est constituée que de segments et d'arcs de cercles dont les centres sont des points nommés de la figure. Les alignements et les intersections constatés sur la figure sont considérés comme mathématiquement vrais.
Ce puzzle, d'origine chinoise, s'appelle un tangram ; en assemblant de diverses

manières les 9 pièces, on peut obtenir des formes variées (des oiseaux, par exemple).

1. En respectant les informations portées sur le dessin et données dans le texte, reproduire cet œuf tel que OB = 5 cm.

2. On considérera pour les questions suivantes l'œuf dessiné à la question 1.



Pour assembler les pièces et obtenir des oiseaux, il faut être sûr que DE = JB.

a. Calculer la longueur exacte de [DE] en justifiant toutes les étapes ; en déduire la longueur exacte de [OH].

b. Prouver que l'angle $\widehat{\text{IJH}}$ mesure 45°.

c. Montrer que CH = JB et en déduire que DE = JB.

d. Calculer l'aire et le périmètre de la pièce DEB.

Exercice 8.

Un grand cube est constitué de 512 petits cubes identiques juxtaposés de 2 cm de côté chacun.

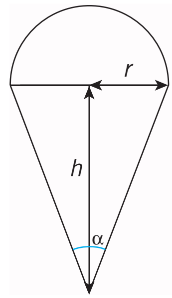
1. Quelle est, en centimètres, la longueur d'une arête du grand cube ?

2. Quel est, en litres, son volume ?

3. Quelle est, en décimètres carrés, son aire ?

Exercice 9.

Un bureau d'études a réalisé un prototype de cornet à glace qui a la forme d'un cône de révolution. Ses dimensions répondent à la contrainte suivante : lorsque le cornet est complètement rempli de glace et surmonté d'une demi-boule de diamètre 4 cm, le volume de glace du cône rempli à ras, doit être égal à celui de la demi-boule qui le surmonte.



1. Quelle est, en cm, la hauteur h du cône ?

On rappelle les formules de volume :

Volume du cône : $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ et Volume de la boule : $\frac{4}{3}\pi r^3$.

2. Lors d'une deuxième étude, en gardant la même forme de cône (le même angle α du cône) on décide de doubler sa hauteur.

a. Combien ce nouveau cône rempli à ras peut-il contenir d'équivalents de boules de 4 cm de diamètre ? (équivalent signifie que tout le volume est occupé par de la glace.)

b. Le nouveau cornet vérifie-t-il la même contrainte que le premier, à savoir l'égalité du volume du cône et du volume de la demi-boule qui le surmonte ?

Exercice 10.

On étudie la durée t (exprimée en heures) d'un parcours en fonction de sa distance d (exprimée en kilomètres) pour différents moyens de transport :

– une voiture sur autoroute : sa vitesse est de 100 km/h ;

– un TGV, sa vitesse est de 240 km/h, mais il faut ajouter une heure à la durée du trajet en train pour le trajet du domicile à la gare ;

– un avion, sa vitesse est de 750 km/h, mais il faut ajouter trois heures à la durée du vol pour le trajet du domicile à l'aéroport et les démarches d'enregistrement.

1. Cinq heures après le départ du domicile, quelle distance a-t-on parcourue avec chaque moyen de transport ?

2. Représenter graphiquement, sur papier millimétré, la durée de parcours en fonction de la distance parcourue pour chacun des moyens de transport.
On prendra comme échelle 1 cm pour 100 km et 1 cm pour une heure.

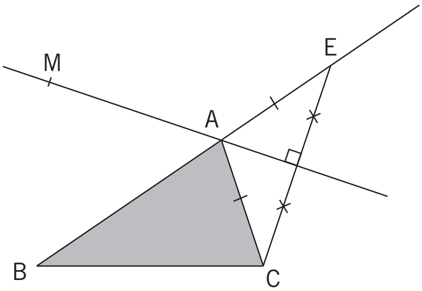
3. Jean affirme : « L'avion va plus vite, donc pour faire 500 km l'avion est le moyen le plus rapide ». Pierre lui répond : « Pour prendre l'avion ou le train, on perd du temps pour aller à la gare ou à l'aéroport, donc pour faire 500 km la voiture est le moyen le plus rapide ».
L'un des deux garçons a-t-il raison ? Justifier la réponse.

CORRIGÉS

Exercice 1.
Unité d'aire : le carreau : $A_1 = 2{,}5$; $A_2 = 3$; $A_3 = 1$; $A_4 = 18$; $A_5 = 12$.
Aide : on peut encadrer les surfaces 1, 2 et 3 dans des rectangles puis procéder par soustractions : on soustrait les aires de triangles (demi-rectangles).
Exemple $A_3 = 6 - 3 - 2$. En déplaçant mentalement les éléments des figures pour reconstituer des carreaux entiers, on peut procéder par additions pour les figures 3 et 4.

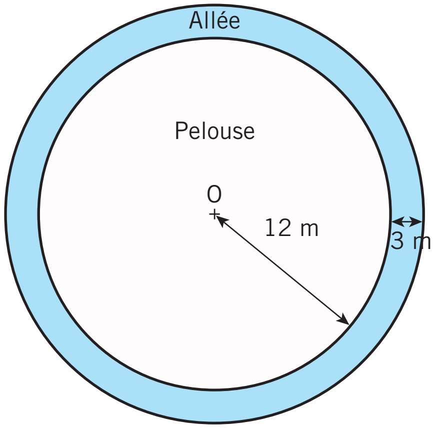
Exercice 2.
Soit $\mathscr{A}$ l'aire du triangle. On a $\mathscr{A} = AB \times AC/2 = BC \times h/2$, donc $AB \times AC = BC \times h$, soit $6 \times 8 = BC \times h$. En utilisant le théorème de Pythagore : $BC = 10$ cm, d'où, $48 = 10 \times h$ et $h = 4{,}8$ cm.

Exercice 3.
1.



2. MC = ME car M appartient à la médiatrice de [EC]. Dans le triangle BME, d'après l'inégalité triangulaire, $MB + ME \geq BE$; d'où $MB + MC \geq BE$. B, A, E étant alignés dans cet ordre, $BE = BA + AE = BA + AC$.
Donc : $MB + MC \geq BA + AC$.
Il s'ensuit $MB + MC + BC \geq BA + AC + BC$, ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 4.



Aire de l'allée en m^2 : $(\pi \times 15^2) - (\pi \times 12^2)$, soit $\pi \times (15^2 - 12^2) = 81\pi$.
Somme à payer en € : $7{,}25 \times 81\pi \approx 1\,845$ €.

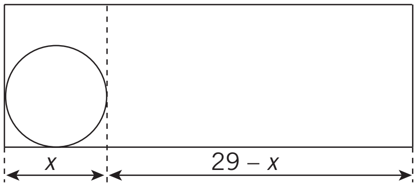
Exercice 5.
1. Il n'est pas possible de découper un disque de 10 cm de diamètre dans la bande de carton, car la partie restante aurait pour longueur 19 cm, ce qui n'est pas suffisant pour entourer une circonférence égale à 10π ($\approx 31{,}4$ cm).
Il faut donc déterminer la plus grande valeur du diamètre x du disque qui respecte les contraintes de l'énoncé, c'est-à-dire la plus grande valeur de x tel que :

$$\begin{cases} 0 \leq x < 10 \\ \pi \times x \leq 29 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x < 10 \\ (\pi + 1) \times x \leq 29 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ 0 < x \leq \frac{29}{\pi + 1} \right.$$

La plus grande valeur possible du diamètre du cylindre est donc : $\frac{29}{\pi + 1} \approx 7{,}00$ cm (valeur approchée à 10^{-2} près par défaut).

2. Pour une question de place, la figure est réalisée à une échelle inférieure :



Exercice 6.

La diagonale [BD] mesure $10\sqrt{2}$ cm, d'où OD $= 5\sqrt{2}$ cm et OE $= 5\sqrt{2} - 5$ cm.

$\mathcal{A}_{AOB} + \mathcal{A}_{BOC} + \mathcal{A}_{AOD} = 3/4\ \mathcal{A}_{ABCD} = 3/4 \times 10^2 = 75.$

En appelant a l'aire d'un quart de disque de rayon 5 cm et b l'aire d'un quart de disque de rayon $5\sqrt{2} - 5$, l'aire hachurée mesure alors :

$$\frac{3}{4}\ \mathcal{A}_{ABCD} - 3a + b$$

$$= 75 - 3\pi \times \frac{25}{4} + \pi \times \frac{(5\sqrt{2}-5)^2}{4}$$

$$= 75 - \frac{25\pi\sqrt{2}}{2} \text{ soit environ } 19{,}46 \text{ cm}^2.$$

Exercice 7.

1. Nous vous laissons le soin de construire la figure. Nous rédigeons ci-dessous les étapes de la construction. Ces instructions ne sont pas attendues dans la copie car non demandées ; par contre, les traits de construction doivent être apparents.

– Tracer le cercle de centre O et de rayon 5 cm.
– Tracer un diamètre [AB] de ce cercle.
– Tracer le diamètre [CD] perpendiculaire à [AB].
– Tracer les demi-droites [AD) et [BD).
– Tracer l'arc de cercle de centre A et de rayon AB ; il coupe [AD) en E.
– Tracer l'arc de cercle de centre B et de rayon AB ; il coupe [BD) en F.
– Tracer l'arc de cercle de centre D, passant par E et F (le petit arc).
– Placez le point H sur le segment [OC] tel que HC = DE.
– Tracer le cercle de centre H et de rayon HC ; il coupe [AB] en I et J.
– Tracer [HI] et [HJ].

2. a. A, D et E étant alignés dans cet ordre, AE = AD + DE et DE = AE – AD.

Calculons AD : le triangle ODA est rectangle isocèle en O par construction, donc, d'après le théorème de Pythagore : $AD^2 = OA^2 + OD^2$ $= 2\ OA^2 = 2 \times 5^2$ et $AD = 5\sqrt{2}$ cm.

Le rayon du cercle de centre A passant par B et E est 10 cm donc AE = 10 cm.

DE = AE – AD d'où $DE = 10 - 5\sqrt{2}$ $= 5 \times (2 - \sqrt{2})$ cm.

H étant un point de [OC], OH = OC – HC $= 5 - (10 - 5\sqrt{2}) = 5 \times (\sqrt{2} - 1)$ cm.

b. $HJ = DE = 5 \times (2 - \sqrt{2})$ cm. Dans le triangle OJH rectangle en O, d'après le théorème de Pythagore : $HJ^2 = OJ^2 + OH^2$;

d'où, $OJ^2 = HJ^2 - OH^2 = 25 \times (3 - 2\sqrt{2})$.

Or, $OH^2 = 25 \times (3 - 2\sqrt{2})$, donc OH = OJ et OJH est rectangle et isocèle en O. Il s'ensuit $\widehat{OJH} = \widehat{IJH} = 45°$.

c. J étant un point de [OB], JB = OB – OJ. De plus, OH = OC – HC ; or, OB = OC = 5 cm et OJ = OH. Donc JB = OH.

HC = DE par construction, donc DE = JB.

d. L'aire $\mathcal{A}$ de la pièce DEB est égale à l'aire $\mathcal{A}'$ du secteur de disque EAB diminuée de l'aire $\mathcal{A}''$ du triangle ADB.

ODA étant rectangle isocèle en O, l'angle $\widehat{DAB}$ mesure 45° et $\mathcal{A}'$ vaut 1/8 de l'aire du disque de rayon AB (10 cm), soit $\frac{1}{8}\pi \times 10^2 = 25\frac{\pi}{2}$ cm^2. $\mathcal{A}'' = \frac{AB \times DO}{2} = \frac{10 \times 5}{2} = 25$ cm^2

D'où $\mathcal{A} = 12{,}5\pi - 25 \approx 14{,}27$ cm^2.

Périmètre :

$$\left(\frac{1}{8} \times 2\pi \times 10\right) + (10 - 5\sqrt{2}) + 5\sqrt{2} = 10 + 2{,}5\pi \approx 17{,}85 \text{ cm}.$$

Exercice 8.

Si l'arête du grand cube « contient » n petits cubes, alors le grand cube est constitué de n^3 petits cubes.

Donc $n^3 = 512 = 8 \times 8 \times 8$ et $n = 8$

1. Longueur de l'arête du grand cube : $2 \times n = 2 \times 8 = 16$ cm.

2. Volume V du grand cube : 16^3 cm^3 soit 4 096 cm^3. V = 4,096 dm^3 = 4,096 L.

3. L'aire du cube mesure 6 fois l'aire d'une face : $6 \times 1{,}6^2 = 15{,}36$ dm^2.

Exercice 9.

1. Le volume V du cône rempli doit être égal au volume de la demi-boule, on a donc : $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi r^3$, d'où, après simplification : $h = 2r$.

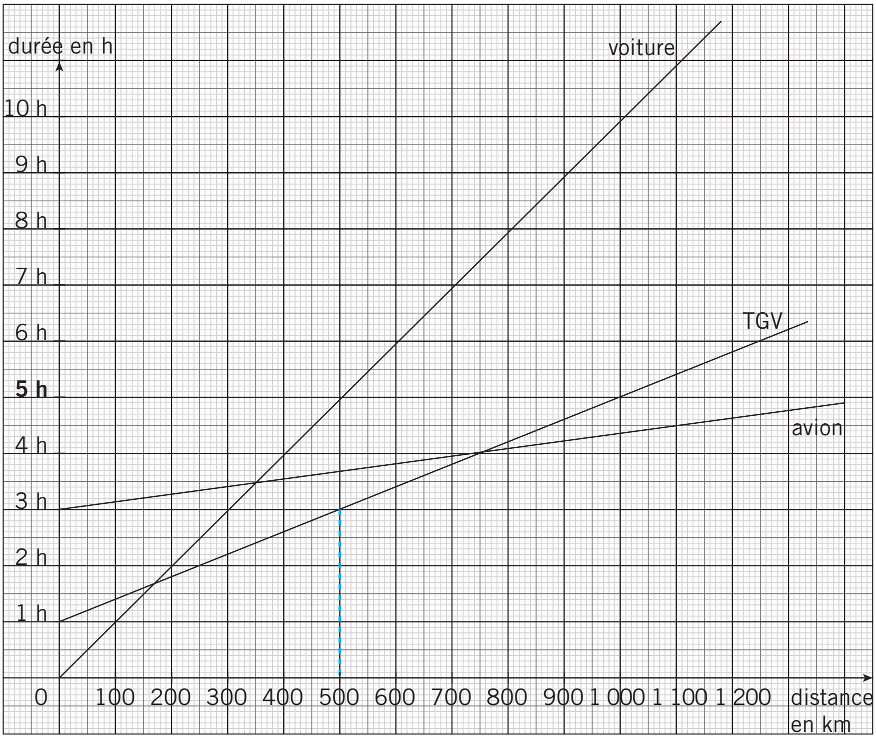
2. Le diamètre de la base du cône mesurant 4 cm, le rayon est donc de 2 cm et la hauteur du cône mesure 4 cm ($2r$).

a. Si on double la hauteur, en conservant le même angle, cela signifie que toutes les dimensions du cône sont multipliées par 2. Le volume V du cône est multiplié par 2^3 c'est-à-dire par 8 (effet d'un agrandissement sur le volume). Le nouveau cône contient donc 8 fois plus de glace que le premier : 8 demi-boules de 4 cm de diamètre, soit 4 boules de 4 cm de diamètre.
b. Le rayon de la demi-boule a doublé lui aussi donc le volume a été multiplié par 8. La contrainte de départ est donc respectée.

Exercice 10.

1. Cinq heures après le départ du domicile, on a parcouru :
– en voiture : $100 \times 5 = 500$ km ;
– en TGV : $240 \times (5 - 1) = 960$ km ;
– en avion : $750 \times (5 - 3) = 1\,500$ km.

2. Fonctions exprimant la distance parcourue en fonction de la durée t :
Pour le déplacement en voiture : $t \mapsto 100\,t$
Pour le déplacement en TGV :
$t \mapsto 240\,(t - 1) = 240\,t - 240$
Pour le déplacement en avion :
$t \mapsto 750\,(t - 3) = 750\,t - 2\,250$.
Ces fonctions sont affines sur chaque intervalle d'étude (avant le départ effectif et après le départ effectif du véhicule). Leurs représentations graphiques sont donc des segments de droite sur chacun de ces intervalles.
Pour le tracé on peut utiliser les valeurs suivantes :
– voiture : pour $t = 0$, $d = 0$;
pour $t = 10$, $d = 1\,000$;
– TGV : pour $t = 1$, $d = 0$;
pour $t = 6$, $d = 1\,200$;
– avion : pour $t = 3$, $d = 0$;
pour $t = 5$, $d = 1\,500$.



3. On peut voir sur le graphique que c'est le train qui met le moins de temps pour parcourir 500 km. Les deux garçons ont tort.