Sujet inédit – Problème autour de la sécurité ; 3 exercices ; jeu de cible

Corrigé

Travail préalable

1. **S'approprier le sujet**
Une lecture rapide du sujet permet d'observer que les parties A, B et C du problème sont indépendantes (une difficulté à un niveau n'empêche pas de poursuivre) et aussi que toutes les questions de la partie A sont indépendantes… ce qui augmente encore votre « latitude » !

Première partie du sujet
Le problème est « concret » : il concerne une préoccupation citoyenne, la sécurité routière. Il est long et fait appel à de nombreux domaines du programme.

Deuxième partie du sujet
L'exercice 1 est composé de trois questions sont indépendantes. À la question 1, il faut distinguer parmi quatre fractions celle(s) qui représente(nt) un (des) nombre(s) décimal (décimaux). Les deux questions suivantes concernent l'arithmétique : divisibilité par 11 et diviseurs d'un entier.
L'exercice 2 est un exercice de géométrie plane qui vise à démontrer une nouvelle propriété. Il balaye plusieurs notions au programme : hauteurs d'un triangle, parallélogramme, cercle circonscrit à un triangle, symétrique d'un point par rapport à une droite.
L'exercice 3 porte sur des calculs de moyennes arithmétiques dans un contexte sportif : une compétition de tir à l'arc dans laquelle chaque compétiteur effectue dix tours de trois lancers de flèches chacun. Il vous est demandé de compléter un tableau de scores pour deux joueurs en justifiant vos calculs.

Troisième partie du sujet
La partie d'analyse de supports d'enseignement et de production d'élèves concerne un jeu de lancer : un jeu de cible. Bien sûr, pratiqué en classe, dans des séances de mathématiques, c'est un support d'apprentissage

(ludique)… et non un jeu d'adresse ! Les zones de la cible du CP (annexe 1, 2 et 3) contiennent de petits nombres (5, 7 et 11) et celles de l'annexe des puissances de 10 (le cœur de cible représente 100 millions… donc le champ numérique est très différent).

2. Mobiliser ses connaissances

Première partie du sujet

Le problème fait appel aux notions de vitesse, de valeur approchée et d'arrondi, de lecture graphique, de fréquence d'une donnée en statistique ; il fait intervenir les théorèmes de Pythagore et de Thalès (ce qui est classique) et la compétence à utiliser un tableur. Il vous faut aussi savoir résoudre un système d'équations.

Deuxième partie du sujet

Dans l'exercice 1, il vous faut savoir :

– qu'une écriture fractionnaire irréductible $\frac{a}{b}$ (a et b) appartenant à Z, *b* non nul) désigne un nombre décimal si et seulement si le dénominateur *b* est le produit d'une puissance de 2 par une puissance de 5 ;
– désigne un nombre rationnel non décimal si et seulement si la décomposition de b en produit de facteurs premiers contient au moins un facteur autre que 2 ou 5.

Vous devez savoir transformer l'écriture canonique $\overline{abc}$ en base dix en sa valeur : $a \times 100 + b \times 10 + c$ (a, b et c sont des chiffres).

Dans l'exercice 2, les propriétés suivantes sont sollicitées :
– si deux droites sont perpendiculaires à une même droite alors elles sont parallèles entre elles ;
– si un triangle est inscrit dans un cercle et a un de ses côtés pour diamètre alors il est rectangle ;
– les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu ;
– si une droite d est la médiatrice d'un segment [MM'] alors M et M' sont symétriques par rapport à d.

Dans l'exercice 3, Il vous faut savoir :
– calculer une moyenne arithmétique (dans laquelle toutes les valeurs ont le même « poids ») : une série de valeurs étant donnée, la moyenne arithmétique de cette série est le quotient de la somme de toutes les valeurs par l'effectif total de la série ;
– appliquer un pourcentage : si x est supérieur de 40 % à y, alors $x = 1{,}40y$;
– résoudre une équation du premier degré à une inconnue.

Il peut être utile de savoir que la moyenne arithmétique d'une série reste inchangée si on ajoute une (ou plusieurs) valeur(s) à la série égale(s) à cette moyenne.

Troisième partie du sujet

Il vous faut procéder avec rigueur : il vous faut trouver toutes les décompositions possibles d'entiers donnés en une somme dont les termes sont fixés (valeurs des zones de la cible)… et justifier que certains entiers ne le peuvent pas (ils correspondent à des scores impossibles). Vous devez, pour l'analyse pédagogique, connaître les objectifs des différents types de problèmes pratiqués en classe (pour découvrir, s'entraîner…) et donc être capable d'en discerner les caractéristiques (contenu de l'énoncé, modalités de travail, démarches possibles ou attendues…).

Copie du candidat

Première partie
Problème autour de la sécurité

Partie A : La sécurité

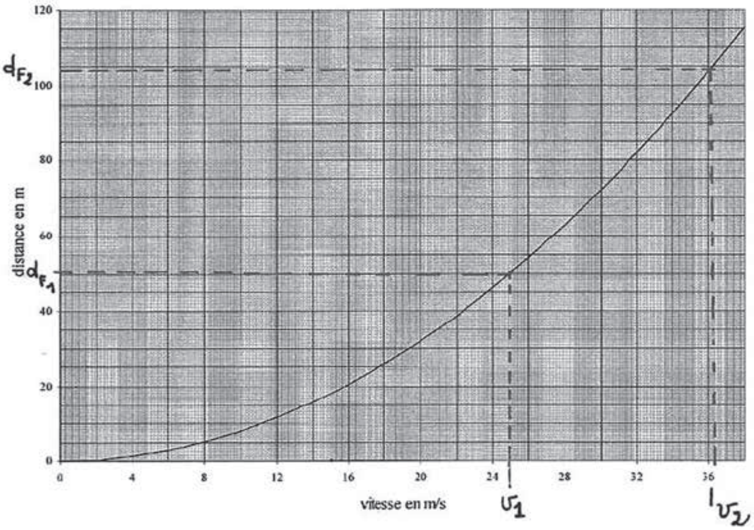
1. a) Déterminons graphiquement, au mètre près, la distance de freinage D_F, pour v_1 et v_2.

Les vitesses portées en abscisse sur le graphique sont exprimées en m/s ; il faut par conséquent convertir v_1 et v_2 en m/s.

$$v_1 = \frac{90 \text{ km}}{1 \text{ h}} = \frac{90\,000 \text{ m}}{3\,600 \text{ s}} = 25 \text{ m/s}$$

$$\text{et } v_{12} = \frac{130 \text{ km}}{1 \text{ h}} = \frac{130\,000 \text{ m}}{3\,600 \text{ s}} = 25\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 36{,}1 \text{ m/s}.$$

On reporte ces données en abscisse. Sur le graphique, les pointillés nous permettent de conclure que, la distance de freinage D_{F1} pour un véhicule roulant à 90 km/h est approximativement 50 m et que celle, D_{F2}, pour un véhicule roulant à 130 km/h est d'environ 104 m (environ 105 m est une réponse qui convient également).



b) Distance d'arrêt, au mètre près, lorsque le véhicule roule à la vitesse v1, puis à la vitesse v_2.

On utilise l'égalité $D_A = D_R + D_F$.

La distance D_R de réaction est la distance parcourue par un véhicule en 1 s.

D'après la question précédente, nous savons qu'en 1 s (temps de réaction), un véhicule roulant à 90 km/h parcourt 25 m ; on en déduit que sa distance d'arrêt, au mètre près est 25 m + 50 m, soit 75 m.
De même, sachant qu'en 1 s, un véhicule roulant à 130 km/h parcourt environ 36 m ; on en déduit que sa distance d'arrêt, au mètre près, est 104 m + 36 m, soit 140 m.
c) Vitesse en km/h à laquelle roule l'automobiliste si D_R est égale à 15 mètres
DR est la distance parcourue en 1 s. Si l'automobiliste parcourt 15 m en 1 s (vitesse de 15 m/s) ; en 1 h (3 600 s), il parcourra 15 m\3 600 = 54 000 m = 54 km.
Sa vitesse est donc 54 km/h.
d) Distance d'arrêt D_A, à un mètre près
On utilise l'égalité $D_A = D_R + D_F$.
On détermine graphiquement D_F quand le véhicule se déplace à la vitesse de 15 m/s (on procède comme à la question a) ; on lit : $D_F \approx 18$ m. On en déduit que $D_A \approx 15 \text{ m} + 18 \text{ m}$, soit $D_A \approx 33$ m.
2.

Méthodo
La consigne de sécurité (l'encadré) peut s'exprimer sous la forme : la portée des feux de croisement doit être supérieure ou égale à 30 m et doit être inférieure ou égale à 45 m. Ce qui se traduit mathématiquement par : 30 m $\leq$ MH $\leq$ 45 m.

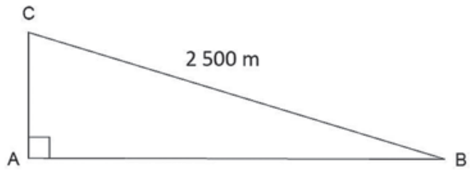
a) Le véhicule respecte-t-il la consigne de sécurité lorsque le coffre est plein ?
D'après l'énoncé et le schéma, les droites (OH) et (LK) sont toutes deux perpendiculaires à la droite (HM) ; elles sont donc parallèles entre elles. Les droites (OL) et (HK) étant sécantes en E et les droites (OH) et (LK) étant parallèles, on a, d'après le théorème de Thalès :
$\frac{MK}{MH} = \frac{LK}{OH}$, c'est-à-dire $\frac{MK}{MK+3} = \frac{0{,}76}{0{,}8}\ \frac{MK}{MK+3} = \frac{19}{20}$.
D'où 20 MK = 19(MK + 3), soit MK = 19 $\times$ 3 = 57 m.
On a alors HM = 57 + 3 = 60 m.
60 m > 45 m, donc le véhicule ne respecte pas les consignes de sécurité lorsque le coffre est plein.
b) Longueur LK possible, arrondie au cm, qui permet de respecter la consigne de sécurité
Bien que l'énoncé ne le précise pas, on considère qu'il s'agit du même véhicule que précédemment et que par conséquent OH = 0,8 m.
Les hypothèses n'ayant pas changé, on a $\frac{MK}{MH} = \frac{LK}{OH}$, c'est-à-dire $\frac{MK-3}{MH} = \frac{LK}{0{,}8H}$
(on exprime MK en fonction de MH car la consigne de sécurité porte sur MH).
En effectuant les produits en croix, on a : MH $\times$ LK = 0,8 $\times$ (MH – 3) soit MH $\times$ (LK – 0,8) = – 2,4 ou MH $\times$ (0,8 – LK) = 2,4. On en déduit MH $= \frac{2{,}4}{0{,}8 - LK}$.
D'après la consigne de sécurité, la plus grande longueur MH vérifie MH $\leq$ 45 m.

On a donc : $\dfrac{2{,}4}{0{,}8-LK} \leq 45$ soit, (0,8 – LK) étant positif, $\dfrac{0{,}8-LK}{2{,}4} \geq \dfrac{1}{45}$, c'est-à-dire $0{,}8 - LK \geq \dfrac{2{,}4}{45}$ ou $LK \leq 0{,}8 - \dfrac{2{,}4}{45}$ ou $LK \leq 0{,}746$ m.

Il est demandé de fournir une réponse arrondie au cm. Mathématiquement, cet arrondi est la valeur approchée par excès à 10^{-2} près, soit 0,75 m. Cette réponse, par excès, est incohérente car elle ne respecte pas la condition de sécurité qu'on a déterminé exactement par un calcul ($LK \leq 0{,}746$ m). De fait, il convient, si on souhaite une réponse au cm près, de fournir la valeur approchée par défaut, soit 0,74 m.

3. Dénivelé, arrondi au mètre près, entre le point de départ et le point d'arrivée 2,5 km = 2 500 m

Schéma de la situation :



On a : $\dfrac{AC}{AB} = 10\ \% = 0{,}10 = \dfrac{1}{10}$

Plusieurs méthodes peuvent être envisagées, en voici deux :

• Méthode 1 – Utilisation du théorème de Pythagore

$\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{1}{10}$, donc AB = 10AC

Le triangle ABC est rectangle en A, donc, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$AB^2 + AC^2 = BC^2$.

$(10AC)^2 + AC^2 = BC^2$.

$100AC^2 + AC^2 = BC^2$, soit $101AC^2 = 2\,500^2$

On en déduit que $AC = \sqrt{\dfrac{2\,500^2}{101}} \approx 248{,}75$ m. Sa valeur arrondie au m près est 249 m.

• Méthode 2 – Utilisation des relations trigonométriques

Dans le triangle ABC rectangle A, la pente (de 10 % ou 0,10) représente la tangente de l'angle $\hat{B}$.

On a : $\tan\hat{B} = \dfrac{AC}{AB} = 0{,}10$ d'où $\hat{B} \approx 5{,}7°$.

$\sin\hat{B} = \dfrac{AC}{BC}$

$AC = BC \times \sin\hat{B}$ ou $AC = 2\,500 \times \sin 5{,}7° \approx 248{,}75$ m. La valeur arrondie au m près du dénivelé est 249 m.

Partie B : Les accidents

1. L'affirmation de la personne est-elle juste ?

La dernière ligne du tableau concerne les fréquences cumulées. Dans la cellule U4, on lit qu'à 20 h, 87 % des accidents ont eu lieu. On en déduit que 13 % (100 % – 87 %) ont lieu entre 20 h et 24 h.

On en conclut qu'affirmer que 25 % des accidents se produisent entre 20 h et 24 h est une assertion fausse.

2. Formule à entrer dans la cellule C4

La formule à entrer dans la cellule C4 est « = B4 + C3 ».

Remarque

En la recopiant vers la droite, elle s'incrémentera d'une « colonne » à la fois ; elle prendra successivement les valeurs « = C4 + D3 », « = D4 + E3 », « = E4 + F3 », etc.

3. Explication du résultat obtenu dans la cellule T4

Compte tenu des résultats affichés à l'écran dans les cellules S4 et T3, on s'attendrait à ce qu'en T4 figure 71 + 9 soit 80. Or, on lit 81.

Justification : on observe qu'à la ligne 3, les fréquences sont exprimées en valeurs entières (option de format des nombres à l'affichage) ; ces valeurs sont les arrondis à l'entier des fréquences réelles. Par exemple, la fréquence en T3 est le quotient de 7 013 par 76 309 ($\times$ 100, pour l'expression en %), ce quotient est environ 9,19.

De fait, ces arrondis successifs peuvent générer un passage à l'entier supérieur. Par exemple : 1,2 + 1,4 = 2,6 serait arrondi à 3, alors que la somme des arrondis des deux termes (1 + 1) est égale à 2.

De la même manière, il est probable que les nombres en S4 et T3 sont des valeurs approchées par défaut et que la somme des décimales « cachées » est supérieure ou égale à 0,5, d'où un arrondi correspondant à une valeur approchée par excès.

Partie C : Consommation de carburant

1. Nombre de kilomètres que l'automobile a effectué en ville et en zone mixte

Conversions :

- en ville : 5 L/100 km = 0,05 L/km
- en zone mixte : 4,2 L/100 km = 0,042 L/km

Les données du problème se traduisent par le système suivant :

$$\begin{cases} x + y = 350 \\ 0{,}05x + 0{,}042y = 16{,}3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 350 \\ 50x + 42y = 16\,300 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -50x - 50y = -17\,500 \\ 50x + 42y = 16\,300 \end{cases}$$

En additionnant membre à membre les 2 égalités, on obtient : $-8y = -1\,200$, d'où $y = \dfrac{1\,200}{8} = 150$.

On sait que $x + y = 350$, d'où $x = 350 - y = 350 - 150 = 200$.

On en conclut que le véhicule a parcouru 200 km en ville et 150 km en zone mixte.

2. Économie réalisée par l'automobile hybride (en volume de carburant)

Exprimons en L/100 km la consommation du véhicule classique :

- en ville : si le véhicule fait 8 km avec un litre de carburant, il fait 1 km avec 1/8 L et 100 km avec 100/8 L soit avec12,5 L ; en ville, il consomme donc 12,5 L/100 km ;

– en zone mixte : si le véhicule fait 10 km avec un litre de carburant, il fait100 km avec100/10 L ; en zone mixte, il consomme donc 10 L/100 km.
Pendant la semaine, le véhicule classique a consommé, pour les 200 km de ville : $2 \times 2{,}5$ L soit 25 L et, pour le trajet de 150 km en zone mixte $1{,}5 \times 10$ L soit 15 L. Soit un total de 40 L.
On en conclut que l'économie réalisée par l'automobile hybride est, en L, de $40 - 16{,}3$, soit 23,7 L.

Deuxième partie
Exercices

Exercice 1

1. Les nombres sont-ils décimaux ?

Méthodo

Pour répondre en utilisant les écritures fractionnaires, il faut écrire les fractions sous forme irréductible.

a) $\frac{17}{8} = \frac{17}{2^3}$ c'est une fraction irréductible qui ne contient au dénominateur que des puissances de 2 ; elle représente donc un nombre décimal.
Ou $\frac{17}{8} = \frac{17}{2^3} = \frac{17 \times 5^3}{2^3 \times 5^3} = \frac{17 \times 5^3}{1\,000}$, ce nombre peut donc s'écrire comme une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10 ; c'est un nombre décimal.
Ou $\frac{17}{8} = 2{,}125$, c'est un nombre décimal puisqu'il a un nombre fini de chiffres après la virgule.
b) $\frac{8}{17}$ est une fraction irréductible (puisque 17 et 8 sont premiers entre eux) qui a une puissance de 17 au dénominateur. Or un nombre décimal écrit sous forme de fraction irréductible ne comporte que des puissances de 2 ou de 5 au dénominateur. Ce nombre n'est donc pas un décimal.
c) $\frac{2\,794}{55} = \frac{254}{5}$, c'est une fraction irréductible qui ne contient au dénominateur que des puissances de 5 ; elle représente donc un nombre décimal.
Ou : $\frac{2\,794}{55} = \frac{254}{5} = \frac{508}{10} = 50{,}8$.
d) $\frac{1\,096}{152} = \frac{137}{19}$, 137 et 19 étant premiers entre eux, la fraction est irréductible et comporte une puissance de 19 au dénominateur, donc le nombre n'est pas un décimal.

2. Olivier a-t-il raison ?
Soit $\overline{abc}$ un entier à 3 chiffres.

$$\begin{aligned}\overline{abc} &= a \times 100 + b \times 10 + c \\ &= a \times 100 + (a + c) \times 10 + c \\ &= 110a + 11c \\ &= 11 \times (10a + c)\end{aligned}$$

Sujet 1

Dans le cas où $b = a + c$, le nombre $\overline{abc}$ est donc bien divisible par 11 et Olivier a raison.

3. a) Nombres entiers inférieurs à 10 possédant exactement trois diviseurs Les deux seuls nombres entiers inférieurs à 10 possédant exactement 3 diviseurs sont : 4 (ses diviseurs sont 1, 2 et 4) et 9 (ses diviseurs sont 1, 3 et 9).

b) Résolvons l'énigme

Nous cherchons un nombre de la forme abc tel que $a + b + c = 13$.

Nous savons de plus que ce nombre doit avoir exactement 3 diviseurs, c'est donc le carré d'un nombre premier.

• Justification possible n° 1 :

En utilisant la « formule » donnant le nombre de diviseurs d'un entier :

Si on a une décomposition d'un entier en produit de nombres premiers du type :

$$\overline{abc} = p_1^{n_1} \times p_2^{n_2} \times p_3^{n_3}$$

Alors le nombre de diviseurs est de la forme : $(n_1 + 1) \times (n_2 + 1) \times (n_3 + 1) \times \ldots$

Pour que ce nombre soit égal à 3, la seule solution est d'avoir $n_1 = 2$ et les autres n_i nuls. Il s'ensuit que $\overline{abc} = p^2$ et le nombre cherché doit être le carré d'un nombre premier.

• Justification possible n° 2 :

Pour qu'un nombre N possède exactement trois diviseurs, il faut qu'il en ait un seul différent de 1 et de lui-même.

Le carré d'un nombre premier p répond à la question. En effet ses seuls diviseurs sont 1, p et $p^2 = N$.

De plus, ce sont les seuls nombres qui ont trois diviseurs exactement.

En effet :

– si un nombre N est multiple de deux nombres premiers distincts p et q, il admet comme diviseurs au moins 1, p, q et $pq = N$.

– si un nombre est multiple d'un seul nombre premier p et s'il est égal à une puissance supérieure ou égale à 3 de ce nombre, il admet au moins comme diviseurs 1, p, p^2 et p^3. Il possède donc plus de trois diviseurs.

Nous cherchons donc un nombre à trois chiffres dont la somme des chiffres est égale à 13 et qui soit le carré d'un nombre premier (d'après l'énoncé ce nombre est unique). Pour cela, calculons les carrés des nombres premiers à partir de 11 et éliminons les résultats qui ne satisfont pas à la condition sur la somme des chiffres.

Finalement, 841 convient : il a trois chiffres et c'est le carré de 29, il a donc bien 3 diviseurs (1, 29 et 841).

Exercice 2

1. Perpendicularité de (DC) et (AC), parallélisme de (BB') et (DC)

Méthodo

Pensez à reformuler les questions : « les droites (AC) et (DC) sont perpendiculaires » revient à dire que « le triangle ADC est rectangle en C ».

Nommez le cercle car vous aurez souvent à l'évoquer.

Soit $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC.
On sait que [AD] est un diamètre du cercle $\mathscr{C}$ et que C est sur $\mathscr{C}$; on en déduit que le triangle ADC est rectangle en C car il est inscrit dans un cercle de diamètre [AD]. Par conséquent : (DC) est perpendiculaire à (AC).
Par ailleurs, les droites (BB') et (AC) sont perpendiculaires car (BB') est la hauteur issue de B du triangle ABC.
Les droites (BB') et (DC) sont perpendiculaires à la même droite (AC) ; elles sont donc parallèles.
2. BHCD et un parallélogramme

Méthodo

Listez (mentalement) les propriétés caractéristiques d'un parallélogramme et confrontez-les aux informations (données de l'énoncé et résultats déjà démontrés) dont vous disposez : la question précédente permet de dire que les côtés [BH] et [DC] du quadrilatère BHCD sont parallèles car H est sur (BB') ; d'où l'idée de prouver que les côtés [HC] et [BD] sont, eux aussi, parallèles.

Par un raisonnement analogue à celui développé à la question 1, on peut dire que : le triangle ADB est rectangle en B car il est inscrit dans le cercle de diamètre [AD], donc (DB) est perpendiculaire à (AB). (CC') est perpendiculaire à (AB) car (CC') est la hauteur issue de C dans le triangle ABC. Les droites (CC') et (DB) sont perpendiculaires à la même droite (AB) : elles sont donc parallèles.
Nous avons prouvé à la question 1 que les droites (BB') et (DC) sont elles aussi parallèles : le quadrilatère BHCD a ses côtés opposés parallèles, c'est donc un parallélogramme.
3. a) Nature du triangle HH'D

Méthodo

L'observation de la figure donne à penser que le triangle HH'D est rectangle en H' ; reste à le prouver. En l'absence de données directes sur le triangle HH'D qui permettraient de conclure, considérez une sur-figure, c'est-à-dire une figure qui contient la figure HH'D.

Le triangle AH'D est rectangle en H' car il est inscrit dans le cercle de diamètre [AD]. Comme H est sur le segment [AH'], on en déduit que le triangle HH'D est rectangle en H'.
b) M est le centre du cercle circonscrit à HH'D
On sait que : le quadrilatère BHCD est un parallélogramme (question 2).
Comme les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu, on en déduit que M est le milieu de la diagonale [HD] du parallélogramme BHCD.
D'autre part, comme le triangle HH'D est rectangle en H', il a pour cercle circonscrit le cercle de diamètre [HD].
D'après ce qui précède, le centre de ce cercle est M.
4. H' est le symétrique de H par rapport à la droite (BC)
La droite (HH') porte la hauteur issue de A du triangle ABC, donc (HH') est perpendiculaire à (BM).

1

Sujet

D'après la question 3.a, (H'D) est aussi perpendiculaire à (HH').
On en déduit que les droites (BM) et (H'D) sont parallèles, car elles sont toutes deux perpendiculaires à (HH').
Ainsi, dans le triangle HDH', la droite (MB) passe par le milieu M du côté [HD] et est parallèle au côté [H'D] ; elle coupe donc le troisième côté [HH'] en son milieu.
On en conclut que (BM) est la médiatrice du segment [HH'] et donc que H' est le symétrique de H par rapport à (BM).

5.

Méthodo

Faites le lien entre la définition initiale du point H' et la propriété qui vient d'être démontrée.

Le raisonnement précédent s'applique de la même façon aux autres côtés du triangle ABC. On a donc démontré la propriété suivante : les symétriques de l'orthocentre d'un triangle par rapport aux côtés de ce triangle se trouvent sur le cercle circonscrit à ce triangle.

Exercice 3

Méthodo

Si on note m la moyenne des 7 scores du tableau, alors, la somme des points de Marc aux 7 tours relevés est égale à $7 \times m$. S'il obtient le score m au tour 3, la somme des 8 scores de Marc sera donc égale à $7 \times m + m$, soit $8 \times m$ et sa moyenne sera $(8 \times m) \div 8$; c'est-à-dire m. La moyenne sera donc inchangée si le score obtenu au tour 3 est égal à la moyenne des 7 tours déjà notés dans le tableau. Voici deux procédures possibles pour répondre ; utilisez celle qui vous convient.

1. Moyenne des scores de Marc

• Procédure 1 :

Si le score obtenu au tour 3 est égal à la moyenne des sept tours déjà notés dans le tableau, la moyenne des scores de Marc ne serait pas modifiée. Elle sera donc de :

$$\frac{18+28+12+29+26+19+22}{7} = \frac{154}{7} = 22$$

• Procédure 2 :

Calculons la moyenne M de Marc aux sept tours notés dans le tableau :

$$M = \frac{18+28+12+29+26+19+22}{7} = \frac{154}{7} = 22$$

Si Marc obtient 22 au tour 3, sa moyenne, pour les huit tours sera de :

$$\frac{154+22}{8} = \frac{176}{8} = 22$$

2. La moyenne de Marc peut-elle égaler ou dépasser celle de Lucie ?

• Procédure 1

La moyenne de Lucie étant de 23 pour les 8 tours, la somme des points qu'elle a obtenus est donc égale à 23×8, soit 184.
Marc a 22 de moyenne, il a donc totalisé 22×8, soit 176 points.

Pour qu'il ait une moyenne égale ou supérieure à celle de Lucie, il faut donc qu'il augmente sa performance au tour 3 d'au moins (184 – 176) points, soit 8 points.
S'il accroît sa performance de 8 points au tour 3, il totalisera (22 + 8), soit 30 points à ce tour. On sait qu'un tour correspond au lancer de 3 flèches et que 10 est le score parfait pour une flèche. On en déduit que 30 points est le total maximal par tour et que, par conséquent, Marc peut au mieux obtenir une moyenne égale à celle de Lucie.
• Procédure 2
La moyenne de Lucie est 23 et celle de Marc 22 (celle de Lucie est de 1 point supérieure). Il y a 8 tours. Pour que Marc obtienne une moyenne au moins égale à celle de Lucie, il doit donc améliorer sa performance d'au moins l'équivalent d'un point par tour (8 points au total). A la question 1, on a vu que Marc avait obtenu 22 au tour 3. Seul le score de ce tour est variable. On en déduit qu'il lui faut augmenter ce score d'au moins 8 points. Dans ce cas il lui faudrait obtenir au moins (22 + 8), soit 30 points. Le score 30 est le score maximal possible pour un tour. On en conclut si Marc améliore son score de 8 points au tour 3 alors il aura la même moyenne que Lucie. En revanche, il ne pourra pas obtenir une moyenne qui soit supérieure à celle de Lucie.
3. Calcul de x et y.

Méthodo
Il s'agit ici de mettre le problème en équation. Pour n'avoir qu'une seule inconnue (on n'a qu'une seule équation correspondant à la moyenne de Lucie), il faut exprimer l'une des deux inconnues en fonction de l'autre. C'est ce qu'on vous demande de faire au préalable.

On sait que le score x obtenu par Lucie au premier tour est supérieur de 40 % au score y qu'elle a obtenu au second tour. On peut donc exprimer x en fonction de y. On a : $x = y + 40\ \%\ y = y + 0{,}40y = 1{,}4y$.
La moyenne de Lucie est : $\dfrac{1{,}4y + y + 29 + 12 + 26 + 27 + 17 + 25}{8} = \dfrac{2{,}4y + 136}{8}$.
On a donc : $\dfrac{2{,}4y + 136}{8} = 23$; soit $2{,}4y + 136 = 8 \times 23$, c'est-à-dire $2{,}4y + 136 = 184$.
On en déduit que $2{,}4y = 184 - 136 = 48$ et que $y = \dfrac{48}{2{,}4} = 20$.
On sait que $x = 1{,}4y$, donc $x = 1{,}4 \times 20 = 28$.

Remarque
Comme vous disposez de la calculatrice, il vous est aisé (et conseillé) de vérifier ces résultats.

Troisième partie

Le jeu de cible : analyse d'exercices proposés à des élèves et de productions d'élèves

1. Réponses aux questions posées

• Calculs préalables : comment obtenir le score 34 ?

Méthodo

Vous devez résoudre au préalable l'exercice « quelles sont les différentes façons d'obtenir un score de 34 ? ». La recherche de solution impose d'envisager de façon exhaustive toutes les décompositions additives de 34 avec de multiples de 11, de 7 et de 5.

Recherchons toutes les écritures de 34 sous la forme : $34 = 11a + 7b + 5c$ (1) avec a, b et c entiers positifs.
On a : $11a < 34$ donc $a < 3$; $7b < 34$ donc $b < 4$; $5c < 34$ donc $c < 6$.
Cherchons les valeurs de b et c pour les 4 valeurs envisageables de a :
– pour $a = 0$, l'égalité (1) devient $34 = 7b + 5c$.

pour b = ...	$7b + 5c = 34$	c
0	$5c = 34$	non entier
1	$5c = 27$	non entier
2	$5c = 20$	$c = 4$
3	$5c = 13$	non entier
4	$5c = 6$	non entier

– pour $a = 1$, l'égalité (1) devient $23 = 7b + 5c$.

pour b = ...	$7b + 5c = 34$	c
0	$5c = 23$	non entier
1	$5c = 16$	non entier
2	$5c = 9$	non entier
3	$5c = 2$	non entier
4	$5c = -5$	négatif

– pour $a = 2$, l'égalité (1) devient $12 = 7b + 5c$.
Cette égalité est vérifiée dans un seul cas : $b = c = 1$.
– pour $a = 3$, l'égalité (1) devient $1 = 7b + 5c$.
b et c étant positifs, cette équation n'admet aucune solution.
Il existe donc deux jeux différents de score 34 :
$34 = 2 \times 11 + 7 + 5$ et $34 = 2 \times 7 + 4 \times 5$.

• Zones de la cible où Guillaume et Jeanne ont mis leurs fléchettes
34 points ne peuvent être obtenus que de deux manières :
$34 = 2 \times 11 + 7 + 5 = 11 + 11 + 7 + 5$ (4 lancers) ;

$34 = 2 \times 7 + 4 \times 5 = 7 + 7 + 5 + 5 + 5 + 5$ (6 lancers).

Comme Jeanne a raté deux fois la cible, on en déduit que Guillaume a placé deux fléchettes dans le 7 et quatre dans le 5 et que Jeanne a placé deux fléchettes dans le 11, une dans le 7 et une dans le 5.

• Nombre de fois où Camille a atteint la cible

D'après la question précédente, il y avait six lancers. Camille a obtenu un score de 34 – 9, soit 25. Ce score peut être obtenu de deux façons :

$25 = 5 \times 5 = 5 + 5 + 5 + 5 + 5$ et $25 = 7 + 7 + 11$.

Camille a donc pu atteindre la cible soit cinq fois, soit trois fois.

Donnée qui pourrait sembler manquer

À la lecture de l'annexe 1, on peut penser qu'il manque le nombre de fléchettes lancées par chacun des enfants. Mais cette indication n'est pas nécessaire pour répondre aux questions posées (*cf. réponses précédentes*).

2. Caractériser le problème

a) Selon l'annexe 2, ce problème relève de la catégorie des « problèmes centrés sur le développement des capacités à chercher ». En effet, les enfants ne disposent pas de procédure experte de résolution ; ils seront amenés à faire des essais et à organiser leurs recherches pour aboutir.

Ce type de problème permet aussi le réinvestissement de connaissances (ici, décompositions additives d'entiers).

b) Les nombres en jeu sont des entiers inférieurs à 34, les connaissances à mobiliser sont l'addition, la soustraction et la comparaison d'entiers ; aussi, on pourrait envisager cette activité en fin de cycle 2 (après des parties effectives de jeux de fléchettes). Mais l'annexe 1 ne précise pas si des jeux de cible sont prévus ; aussi, et compte tenu du niveau de raisonnement nécessaire (absence du nombre de lancers), cette activité relève plutôt du cycle 3.

3. Analyse des procédures et erreurs

• Groupe 1 : Les élèves cherchent à obtenir 34 comme somme des entiers des zones de la cible (11, 7 et 5). Ils posent leurs opérations en colonnes. Ils utilisent correctement la multiplication par 2 et 4 pour faciliter leurs calculs. Les deux décompositions possibles de 34 sont obtenues mais leur conclusion est erronée : ils attribuent à Guillaume (pronom « il ») le lancer de Jeanne et ne donnent pas de réponse pour Jeanne.

• Groupe 2 : Les élèves donnent deux décompositions additives de 34 (en lignes et en colonnes). Le premier calcul est juste mais le second incorrect (la réponse est 33 et non 34). Dans leur réponse (pas de phrase mais un prénom associé à un calcul), ils ne tiennent pas compte du fait que Jeanne « a raté deux fois la cible » (un lancer d'écart seulement).

• Groupe 3 : Les deux décompositions additives, écrites en ligne, sont justes, mais les élèves attribuent à Guillaume le lancer de Jeanne (et inversement).

Groupe 4 : Ces élèves ont trouvé la solution (mais elle n'est pas rédigée). Les calculs sont corrects, écrits en ligne et comportent des parenthèses. Les dessins des cibles semblent inutiles : ils ne correspondent pas aux calculs effectués, ils représentent des cibles vierges.

Groupe 5 : Les élèves donnent une seule décomposition, exacte, de 34, mais sans écrire d'égalité. Ils commettent une erreur en attribuant aux deux enfants le même lancer : ils ne prennent pas en compte les échecs de Jeanne. Le dessin des cibles ne correspond pas non plus au calcul.

4. Comparons les problèmes des annexes 1 et 4

Méthodo

Comparer les problèmes suppose d'expliciter leurs ressemblances et leurs différences.

Dans les deux cas, il s'agit d'un jeu de lancer de fléchettes sur une cible amenant à écrire des décompositions additives d'entiers en utilisant les nombres des zones atteintes. Ils diffèrent sur plusieurs points :

– la taille des entiers inscrits sur la cible : dans l'annexe 1, les nombres 5, 7 et 11 permettent d'effectuer les additions des scores des lancers successifs ; dans l'annexe 4, les nombres se situent dans un autre champ numérique – ce sont des puissances de dix qui atteignent l'ordre des centaines de millions – et amènent à mettre en œuvre les connaissances en numération (décomposition canonique des entiers) ;

– le nombre de lancers : inconnu dans le problème de l'annexe 1, connu dans celui de l'annexe 2 ;

– la réponse aux différentes questions : il y a plusieurs solutions dans l'annexe 1 et une seule dans l'annexe 2 ;

– les objectifs sont différents : dans l'annexe 1, il s'agit d'un problème de recherche et les objectifs visent principalement à faire des essais et à les organiser ; dans l'annexe 2, il s'agit de décomposer un entier en utilisant des puissances de dix et d'additionner de grands nombres (question B) ; c'est un problème d'application qui vise à vérifier ou consolider les connaissances en numération.