Annale 2015 – Problème autour d'un objet géométrique ; 3 exercices ; 3 situations

Corrigé

Travail préalable

1. **S'approprier le sujet**

Ce sujet ne présente pas de difficulté particulière et peut être traité en entier dans le temps imparti. Il aborde des notions variées. Dans chacune des trois parties, il y a des sous-parties indépendantes… Ce qui constitue un avantage pour le candidat qui rencontrerait par endroit des difficultés.

Première partie

Ce problème étudie un objet de décoration : une pyramide en verre remplie de sable de deux couleurs. Il comporte trois parties, la première est indépendante des deux autres.

Deuxième partie

Elle est constituée de quatre exercices courts, simples et indépendants.

L'exercice 1 est un exercice de collège qui porte sur une situation concrète : fuite d'un robinet d'eau. Il fait intervenir la notion de débit.

L'exercice 2 est un exercice simple de probabilité : lancer de deux dés ordinaires non truqués.

L'exercice 3 est un exercice élémentaire de statistique. Il fait intervenir des salaires moyens qu'on veut égaux entre femmes et hommes. Il s'agit, bien que cela ne soit pas précisé, de salaires mensuels. Les informations fournies ne sont pas toutes utiles (médiane et étendue).

L'exercice 4 est un « classique » : à partir d'un nombre donné de fleurs, de deux types, on cherche à composer des bouquets identiques. Il met en œuvre des notions d'arithmétique.

Troisième partie

Elle comporte trois problèmes donnés en cycle 3 à analyser (niveau cours moyen 2). Ils concernent, dans l'ordre, les fractions dans un contexte de géométrie (calcul du périmètre et de l'aire d'un rectangle), la détermination du volume d'une boîte parallélépipédique (dont la hauteur n'est pas donnée), la notion de proportionnalité dans le cadre d'une recette.

2. **Mobiliser ses connaissances**

Première partie

Partie A – On doit construire un patron d'une pyramide non régulière à base carrée dont on dispose de la représentation en perspective. La construction est facilitée : la nature des faces est préalablement demandée (sans justification) ainsi que leurs dimensions (elles sont entières). Il vous faut savoir appliquer le théorème de Pythagore.

Partie B – La pyramide est coupée par un plan parallèle à sa base à une hauteur de 2 cm de celle-ci ; on obtient 2 solides : une petite pyramide (rempli de sable blanc et de volume B) et un tronc de pyramide (rempli de sable rouge et de volume R). La petite pyramide est une réduction de la pyramide initiale (leurs faces respectives sont de même nature et leurs dimensions sont proportionnelles). Il vous faudra appliquer la formule du volume d'une pyramide (elle est rappelée).

Partie C – On envisage ici un cas général : le plan de coupe est à une hauteur variable de la base appelée x. Les volumes B et R sont donc aussi variables (fonctions de x), ils sont notés respectivement $B(x)$ et $R(x)$. La représentation graphique de ces deux fonctions est donnée, il vous faut savoir les lire. On vous demande de déterminer l'expression de $B(x)$. Pour ce faire, vous pourrez appliquer la formule du volume d'une pyramide ou une propriété qui facilite souvent les calculs : dans une réduction ou un agrandissement de rapport k (k est l'échelle), les aires sont multipliées par k^2 et les volumes par k^3.

Deuxième partie

Dans l'exercice 1, à partir d'un débit exprimé en L/min, vous devrez rechercher la quantité d'eau écoulée en 1 h (60 fois plus), puis en 1 jour (24 h) et enfin en 10 jours. Il vous faut savoir que 1 000 L correspondent à 1 m^3.

Dans l'exercice 2, pour comparer les probabilités d'obtenir deux sommes données (5 ou 7), à partir du lancer simultané de deux dés, il est commode de construire un tableau cartésien de toutes les sommes possibles. La probabilité d'obtenir « 5 » est le rapport entre le nombre de fois où il apparaît (1 + 4, 2 + 3…) et le nombre de cas possibles.

Dans l'exercice 3, vous aurez besoin d'appliquer le « sens » de l'indicateur « moyenne » d'une série statistique. Si le salaire moyen d'une série de n individus a une valeur m, alors la somme totale des salaires des $n$individus est égale à $n \times m$ (on considère que chaque individu a gagné m). Vous aurez à résoudre une équation simple.

Dans l'exercice 4, il vous faut savoir que si on fabrique n bouquets identiques à partir de 12 tulipes et 8 roses, le nombre n doit être un diviseur à la fois de 12 et 8 (diviseur commun). Ces nombres étant très simples, trouver leurs diviseurs respectifs ne pose aucune difficulté.

Troisième partie

Dans la situation 1, vous avez besoin de connaître le programme du cours moyen concernant l'enseignement des fractions et des décimaux. À ce niveau de classe, on ne travaille qu'avec des fractions simples dans l'objectif de donner du sens au fractionnement de l'unité pour introduire ensuite les fractions décimales et leurs écritures à virgule (nombres décimaux). En primaire, 3/2 c'est 3 fois une demi-unité (moitié d'unité) ou 1 unité et une demi-unité. Les activités de manipulation puis de représentation (dessin) permettent d'asseoir la notion de fraction. La notion de périmètre s'aborde en CE2, la notion d'aire en CM1. Les formules pour le rectangle sont à connaître en fin de primaire.

Dans la situation 2, il vous faut savoir qu'il est difficile pour un élève de primaire de « lire » la représentation d'un solide (espace tridimensionnel) à partir de sa représentation sur une feuille (espace bidimensionnel) ; en effet, on ne répond pas en fonction de ce que l'on « voit » mais de ce que l'on « sait » (suppose de s'abstraire du dessin). Les erreurs des élèves proviennent le plus souvent de cette difficulté ; d'autant qu'en géométrie plane, ils ont l'habitude de prélever des informations sur le dessin (mesures de longueur notamment).

Dans la situation 3, vous aurez à proposer 3 méthodes de résolution possibles d'un problème simple de proportionnalité. Il vous faudra donc savoir mettre en œuvre les propriétés de linéarité et la règle de trois.

Copie du candidat

Première partie
Problème

A. Réalisation d'un patron de la pyramide

1. a. Longueurs DE et DG

ABCDEFGH est un pavé droit, par conséquent les triangles DHE et DHG sont rectangles en H. De plus, les longueurs des côtés de leur angle droit étant égales (HE = HG = 9 cm et DH = 12 cm), ces triangles sont superposables ; il s'ensuit DG = DE.

Appliquons le théorème de Pythagore au triangle DHE rectangle en H :

$DE^2 = HE^2 + HD^2$, d'où $DE^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$ et $DE = \sqrt{225} = 15$

Les longueurs DE et DG mesurent 15 cm.

b. Nature des triangles DGF et DEF (sans justification)

Méthodo

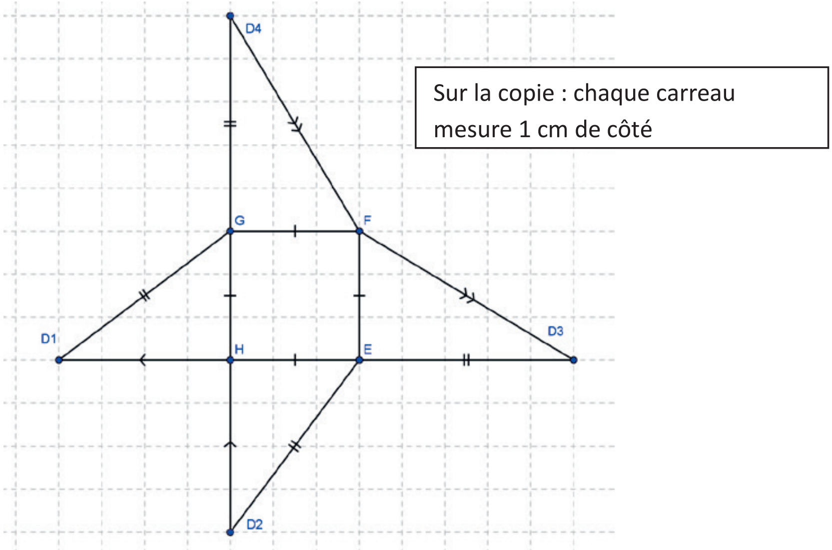
Aucune justification n'était demandée, néanmoins, pour aider le candidat qui ne « verrait » pas dans l'espace, pour déterminer la nature des triangles, il convient d'appliquer la propriété suivante : ABCDEFGH est un pavé droit, donc l'arête [GF] est perpendiculaire à la face CDHG ; or, si une droite est perpendiculaire à un plan en un point (ici G) alors elle est perpendiculaire à toute droite de ce plan passant par ce point. On en conclut que la droite (GF) est perpendiculaire à la droite (GD) et que, par conséquent, le triangle DGF est rectangle en G. On procéderait de même pour le triangle DEF : la droite (EF) est perpendiculaire en E au plan ADHE, elle est donc perpendiculaire à la droite (ED).

Le triangle DGF est rectangle en G et le triangle DEF est rectangle est rectangle en E.

2. Patron de la pyramide à l'échelle 1/3

Méthodo

La pyramide a une base carrée et ses 4 faces latérales sont des triangles rectangles (les questions précédentes ont permis de déterminer leur nature). Le patron devant être réalisé à l'échelle 1/3, toutes les dimensions données sont à diviser par 3 (9 et 12 sont multiples de 3).



B. Étude d'un cas particulier

1. Nature du quadrilatère JKLM

L'énoncé rappelle que la pyramide DJKLM est une réduction de la pyramide DEFGH.

La base de la pyramide DEFGH étant un carré (de 9 cm de côté), celle de la pyramide DJKLM est donc aussi un carré.

2. Longueurs JK et JM

Méthodo

On peut appliquer le théorème de Thalès aux triangles DJK et DHE ou utiliser plus simplement le coefficient de réduction (l'échelle).

On sait que JH = 2 cm, que JK = JM (JKLM étant un carré) et que DH = 12 cm.

Les points D, J et H étant alignés dans cet ordre, on a : DJ = DH-HJ = 10 cm.

L'échelle de la réduction est : $\frac{DJ}{DH} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$; on en déduit que :

$JK = JM = HE \times \frac{5}{6} = 9 \times \frac{5}{6} = 7{,}5$ cm

3. Volume B de sable blanc et volume R de sable rouge dans la pyramide

B est le volume de la pyramide DJKLM :

$B = \frac{1}{3} \times JK^2 \times JD = \frac{1}{3} \times 7{,}5^2 \times 10 = 187{,}5\ \text{cm}^3$

R est la différence entre le volume de DEFGH et B.

Volume de la pyramide DEFGH : $\frac{1}{3} \times HE^2 \times DH = \frac{1}{3} \times 9^2 \times 12 = 324\ \text{cm}^3$

$R = 324\ \text{cm}^3 - 187{,}5\ \text{cm}^3 = 136{,}5\ \text{cm}^3$

C. Étude du cas général

Dans cette partie la hauteur JH de sable rouge est variable. On note x cette hauteur, exprimée en centimètre, et respectivement $B(x)$ et $R(x)$ les volumes de sable blanc et de sable rouge contenus dans la pyramide, exprimés en fonction de x et en centimètre cube.

1. Valeurs possibles pour x

x est compris entre 0 et 12. Si $x = 0$ tout le sable est blanc, si $x = 12$, tout le sable est rouge.

2. Lecture graphique

Méthodo

Une lecture graphique donne des valeurs approchées (seuls les calculs donnent des valeurs exactes), aussi, utilisez la mention : « on lit environ… ».

a. Volumes de sable blanc et de sable rouge si la hauteur de sable rouge est 5 cm

Si la hauteur de sable rouge est de 5 cm, on lit sur le graphique que le volume de sable blanc est d'environ 64 cm^3 et que le volume de sable rouge d'environ 260 cm^3 (la somme de ces 2 volumes donne bien le volume de la pyramide DEFGH).

b. Volumes de sable blanc et de sable rouge si la hauteur de sable blanc est 5 cm

Si la hauteur de sable blanc est de 5 cm, la hauteur de sable rouge est de 7 cm (12 cm – 5 cm). On lit alors sur le graphique que le volume de sable blanc est d'environ 24 cm^3 et le volume de sable rouge d'environ 300 cm^3.

c. Encadrement au cm près de la hauteur de sable rouge pour une égalité de B et de R

Méthodo

B = R au point d'intersection des deux courbes. Attention, on ne demande pas ici, comme précédemment, une lecture « précise » mais un encadrement de la valeur lue en abscisse.

Les volumes des deux sables sont égaux pour une hauteur de sable rouge comprise entre 2 cm et 3 cm.

3. a. Montrons que $B(x) = 0{,}187\,5(12 - x)^3$

Méthodo

On peut calculer le coefficient de réduction (*cf.* question B2) puis appliquer la propriété : dans une réduction de rapport k, les volumes (ici celui de la grande pyramide) sont multipliés par k^3 ou reprendre le raisonnement des questions B2 et B3.

On reprend le raisonnement de la question B2 et la formule du volume d'une pyramide utilisée en B3 mais avec une longueur JH en cm égale à x.

On a, en cm : $DJ = DH - HJ = 12 - x$.

L'échelle de la réduction est : $\dfrac{DJ}{DH} = \dfrac{12 - x}{12}$; on en déduit que

$$JK = HE \times \frac{12-x}{12} = 9 \times \frac{12-x}{12} = \frac{3}{4} \times (12-x)$$

$$B(x) = \frac{1}{3} \times JK^2 \times JD = \frac{1}{3} \times \left(\frac{3}{4} \times (12-x)\right)^2 \times (12-x) = \frac{9}{3 \times 16} \times (12-x)^3$$

b. Déduisons les valeurs exactes des réponses aux questions C.2.a

$B(5) = 0{,}187\,5(12 - 5)^3 = 0{,}187\,5 \times 7^3 = 64{,}312\,5$ (cm^3)

Le volume de la pyramide DEFGH est 324 cm^3 (question B3), donc le volume de sable blanc est :

$324\ cm^3 - 64{,}312\,5\ cm^3 = 259{,}687\,5\ cm^3$

Deuxième partie
Exercices

Exercice 1

Coût de la négligence de Carole

En 1 h, le robinet a déversé : 60×3 L ; en 24 h (1 jour) : $24 \times 60 \times 3$ L et en 10 jours : $10 \times 24 \times 60 \times 3$ L, soit 43 200 L ou 43 200 dm^3 ou 43,2 m^3.

La facture s'élèvera donc à $3{,}50 \times 43{,}2$ soit 151,20€.

Exercice 2

Simon a-t-il autant de chances d'obtenir une somme égale à 7 qu'une somme égale à 5 ?

Portons dans un tableau tous les lancers possibles :

2e dé \ 1er dé	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

On constate que 6 lancers (sur 36) donnent une somme égale à 7 (la probabilité d'obtenir 7 est 6/36 ou 1/6) alors que 4 lancers seulement donnent une somme égale à 5 (la probabilité d'obtenir 5 est 4/36 ou 1/9). On en conclut que Simon se trompe.

Exercice 3

Méthodo

Si le salaire moyen de 3 personnes est 1 700 €, alors la somme des 3 salaires est 1700 € $\times$ 3 = 5 100 €. Ici l'énoncé comporte des données inutiles.

Salaire qu'on doit verser à la nouvelle recrue

Procédure 1 : L'entreprise emploie 7 personnes dont 3 femmes, il y a donc 4 hommes. Après l'embauche, il y aura autant d'hommes que de femmes. Si leurs salaires moyens sont égaux alors la somme des salaires des 4 femmes sera égale à la somme des salaires des 4 hommes.

La somme des salaires des 4 hommes est, en euros : 1 250 + 1 400 + 1 600 + 3 200 = 7 450

En appelant x le salaire de la nouvelle recrue, la somme des 4 salaires des femmes sera, en euros : $1\,700 \times 3 + x = 5\,100 + x$

On a donc : $5\,100 + x = 7\,450$, soit $x = 2\,350$. Le salaire doit être de 2 350 €.

Procédure 2 :

Le salaire moyen des hommes est :

$$\frac{1\,250 + 1\,400 + 1\,600 + 3\,200}{4} = \frac{7\,450}{4} = 1\,862{,}50 \text{ €}$$

La somme des salaires des 3 femmes actuellement dans l'entreprise est égale à : $1\,700 \times 3 = 5\,100$ €

Soit x le salaire de la femme à recruter ; pour que les salaires moyens des hommes et des femmes soient égaux, on doit avoir :

$\dfrac{5\,100 + x}{4} = 1\,862{,}50$ soit $5\,100 + x = 4 \times 1\,862{,}50 = 7\,450$ ou $x = 2\,350$. Le salaire sera de 2 350 €.

Exercice 4

Compositions possibles des bouquets

Le nombre n de bouquets doit diviser le nombre de tulipes et le nombre de roses. C'est donc un diviseur commun à 12 et 18.

Les diviseurs de 12 sont 1, 2, 3, 4, 6 et 12.

Les diviseurs de 18 sont 1, 2, 3, 6, 9 et 18.

Les diviseurs communs à 12 et 18 sont donc 1, 2, 3 et 6 et n peut prendre ces 4 valeurs.

Le fleuriste peut donc faire :

un seul bouquet de 12 tulipes et 18 roses (ce cas est un cas limite),

2 bouquets de 6 tulipes et 9 roses,

3 bouquets de 4 tulipes et 6 roses,

6 bouquets de 2 tulipes et 3 roses.

Troisième partie
Analyse de supports d'enseignement

Situation 1

1. Nature des fractions dans cet exercice

Méthodo

La question est étonnante. À l'école primaire, on n'étudie que des fractions simples (dites usuelles) dans le but d'introduire les fractions décimales puis les nombres décimaux. En primaire, 7/3 (un nombre rationnel) n'a pas à être considéré comme le quotient de 7 par 3 mais comme « 7 fois le tiers » (on reporte 7 fois une partie de l'unité partagée en trois « parties égales »).

Quand on lit l'énoncé, on peut considérer que les fractions sont des opérateurs en tant qu'elles « agissent » (opèrent) sur d'autres nombres qui sont des mesures de longueur. C'est seulement en collège que, par exemple, 3/5 sera conçu comme une autre écriture du nombre 0,6 et que sera introduite la notion de nombre rationnel. En primaire, les fractions qui sont associées à des nombres sont les fractions décimales en tant qu'elles donnent du sens à la notion de nombre décimal et justifient les écritures à virgule.

2. Analyse des productions des 3 élèves

a. Pour chacun, citons 2 compétences acquises dans le domaine grandeurs et mesures

Méthodo

Lisez bien la consigne : restez exclusivement dans le domaine des grandeurs et mesures, ici, périmètre et aire.

• Eva sait calculer le périmètre d'un rectangle : elle calcule le demi-périmètre puis le multiplie par 2 et l'aire d'un rectangle : elle multiplie sa longueur et sa largeur.

• Maxime procède de même (bien que les mesures soient fausses) et montre ainsi les deux mêmes compétences.

• Jeanne ne fait pas de calcul, elle dénombre un nombre de carreaux mais son comptage montre qu'elle semble avoir acquis la notion de périmètre (la mesure « du tour » du rectangle, avec une erreur d'unités toutefois : elle dénombre 12 unités qui ne sont pas toutes égales) et la notion d'aire du rectangle (nombre de carreaux intérieurs).

b. En quoi la production d'Eva témoigne d'une bonne compréhension de la notion de fraction

Malgré une erreur d'écriture (3/4 = 45 et 3/5 = 30), Eva calcule correctement les 3/4 de 60 : elle partage 60 en quatre parts égales (égalité 60 = 15 + 15 + 15 + 15) puis elle prend 3 de ces parts (45). Elle procède de même correctement pour calculer les 4/5 de 50. Elle semble donc avoir bien compris ce que signifie une fraction.

c. En quoi l'erreur de Maxime révèle une mauvaise compréhension de la notion de la fraction

Maxime interprète 3/4 comme signifiant 3,4 ; pour lui le trait de fraction équivaut à une virgule.

3. Intérêt et difficultés éventuelles pour chacune des options de l'enseignant

Le professeur peut utiliser ces trois options dans une pédagogie différenciée.

• 50 cm de largeur et 60 cm de longueur : pour ces dimensions (retenues), les calculs des 3/5 de la largeur et des 3/4 de la longueur sont simples (50 et 60 sont multiples respectivement de 5 et 4, on obtient des mesures entières) mais ces dimensions ne permettent pas aux élèves de représenter la plaque initiale en vraie grandeur sur leur cahier. Il leur est donc impossible d'effectuer le partage sur le dessin puis de mesurer les dimensions du rectangle à découper.

• 10 cm de largeur et 16 cm de longueur : pour ces dimensions, les calculs des 3/5 de la largeur et des 3/4 de la longueur sont encore plus simples ; pour résoudre l'exercice, les élèves peuvent s'appuyer sur un dessin (en utilisant par exemple du papier quadrillé à carreaux de 5 mm de côté).

• 10 cm de largeur et 14 cm de longueur : ces dimensions permettent également de s'appuyer sur un dessin pour effectuer les partages ; mais dans ce cas la longueur du rectangle découpé n'est pas un entier (le quart de 14 cm est égal à 3,5 cm donc les trois quarts de 14 cm représentent 10,5 cm). Si les élèves n'utilisent pas un dessin, le calcul est plus difficile à effectuer. Par ailleurs, les calculs de périmètre et d'aire amènent à opérer sur des décimaux, ce qui est, en soi, plus difficile que de travailler avec des entiers.

Situation 2 – CM2

1. Deux pré-requis dans le domaine de la géométrie nécessaires pour résoudre l'exercice

Méthodo

La question posée dans l'exercice porte sur le calcul d'un volume ; cette notion appartient au domaine des grandeurs et mesures (et non à celui de la géométrie).

Pour résoudre cet exercice, un élève doit savoir :
– que la boîte est un pavé droit et qu'elle a donc 6 faces rectangulaires ;
– que les faces opposées sont deux à deux superposables.

Deux compétences étaient demandées, on peut citer celle-ci : savoir lire la représentation, c'est-à-dire outre reconnaître un pavé droit, imaginer les faces invisibles, c'est-à-dire concevoir qu'il y a 8 segments « en ficelle » entourant la boîte et qu'ils ont la même longueur que les arêtes du pavé droit.

2. a. Étapes du raisonnement de l'élève

Méthodo

Il n'y a pas d'autre trace du raisonnement de l'élève que les 5 lignes de calcul, on ne peut donc que poser des hypothèses sur sa démarche. Il se peut que l'élève ait mal interprété les dimensions portées sur le dessin et associe 18 cm, le plus grand nombre, aux dimensions de la plus grande face et 10 cm comme les longueurs des segments sur les plus petites faces visibles. On remarque qu'il n'y a pas le calcul du volume de la boîte (question posée dans l'exercice).

« 120 – 28 » = 92 donne la longueur totale de ficelle sur les faces de la boîte (hors nœud) ;
« $2 \times 18 = 36$ » peut correspondre, pour l'élève, au calcul de la longueur de ficelle formée par la croix sur la face du dessus (il semble associer le plus grand nombre (18) à la plus grande face visible) ;
« $2 \times 10 = 20$ » peut correspondre, pour l'élève, au calcul de la longueur de ficelle sur les 2 faces visibles verticales (le plus petit nombre (10) est associé aux « petites faces ») ;
« 36 + 20 = 56 » est la somme des 2 longueurs précédentes ;
« $92 - 56 = 36 \div 2 = 18$ » vise à calculer ce qui reste alors de ficelle (36) puis à déterminer la hauteur demandée (division par 2).

b. Erreurs ou oublis

Sujet 2

Méthodo

En désignant par L la longueur de la boîte, l sa largeur et h sa hauteur, la ficelle sans le nœud (92 cm) représente 4 h + 2 L + 2 l. On a donc 92 = 4 h + 36 + 20, d'où 4 h = 36 et h = 9.

L'élève n'a semble-t-il pris en compte que les 3 faces visibles du dessin ; sur celles-ci il y a 4 morceaux de ficelle et son calcul montre qu'il a ajouté 4 longueurs (considérées 2 à 2 identiques).
Il n'a pas raisonné sur l'objet réel ; les dimensions portées sur le dessin n'ont pas été comprises comme désignant la longueur et de la largeur du pavé droit.
La division par 2 montre qu'il a considéré qu'il n'y a que 2 segments verticaux alors qu'il y en a 4 (il aurait donc dû diviser 36 par 4 et non par 2).
De plus, dans son dernier calcul, il utilise incorrectement le signe « = ». (Il aurait dû l'écrire en deux étapes 92 – 56 = 36 puis 36 ÷ 2).

Situation 3 – CM2

1. Principale notion du programme revisitée
Cet exercice porte sur la notion de proportionnalité.
2. Trois méthodes possibles de résolution et propriétés mobilisées dans chaque cas
Première méthode : c'est elle qui est favorisée par le choix des données ; comme 10 crêpes coûtent 14 € et 5 crêpes 7 €, 15 crêpes (10 + 5) coûtent le prix de 10 plus le prix de 5, soit 14 € + 7 € soit 21 €. On utilise ici la propriété additive de linéarité.
Deuxième méthode : comme 5 crêpes coûtent 7 €, 15 crêpes (3 fois 5) coûtent 7 € × 3 soit 21 €.
On utilise ici la propriété multiplicative de linéarité.
Troisième méthode : comme 10 crêpes coûtent 14 €, une crêpe coûte 10 fois moins, soit 1,40 € et les 15 crêpes coûtent 15 fois plus, soit 1,40 € × 15 soit 21 €.
On utilise ici le retour à l'unité, c'est-à-dire la « règle de trois ».