J. 15 1445

DIRECTION GÉNÉRALE DES FINANCES PUBLIQUES

CONCOURS EXTERNE POUR L'ACCÈS AU GRADE D'INSPECTEUR DES FINANCES PUBLIQUES

ANNÉE 2016

ÉPREUVE ÉCRITE D'ADMISSIBILITÉ N° 2

Durée : 3 heures - Coefficient : 5

Mathématiques

Toute note inférieure à 5/20 est éliminatoire.

Recommandations importantes

Le candidat trouvera au verso la manière de servir la copie dédiée.

Sous peine d'annulation de sa copie, le candidat ne doit porter aucun signe distinctif (nom, prénom, signature, numéro de candidature, etc.) en dehors du volet rabattable d'en-tête.

Il devra obligatoirement se conformer aux directives données.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DES FINANCES ET DES COMPTES PUBLICS

Tournez la page S.V.P.

Le candidat devra compléter l'intérieur du volet rabattable des informations demandées et se conformer aux instructions données

Nom de naissance

Prénom usuel

Jour, mois et année

Numéro de candidature

Signature obligatoire

Nom : ....

Prénom : ....

Date de naissance : ....

N° de candidature : ....
(si absence de code barre)

Signature :

ÉTIQUETTE D'IDENTIFICATION

Axe de lecture code à barres candidat

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

Faire comme ceci

Ne pas faire

ÉTIQUETTE D'IDENTIFICATION

Axe de lecture code à barres candidat

À compléter par le candidat

Ne rabattre le cache qu'en présence d'un membre de la commission de surveillance

Concours externe - interne - professionnel - ou examen professionnel [1]
[1] Rayer les mentions inutiles

externe

Pour l'emploi de : Inspecteur des Finances publiques

Épreuve n° : 2

Préciser éventuellement le nombre d'intercalaires supplémentaires

Matière : 030 – Mathématiques

Date : 0 8 0 9 2 0 1 5

Nombre d'intercalaires supplémentaires :

À L'ATTENTION DU CANDIDAT

En dehors de la zone d'identification rabattable, les copies doivent être totalement anonymes et ne comporter aucun élément d'identification tel que nom, prénom, signature, paraphe, localisation, initiale, numéro, ou toute autre indication même fictive étrangère au traitement du sujet.

Il est demandé aux candidats d'écrire et de souligner si nécessaire au stylo bille, plume ou feutre, de couleur noire ou bleue uniquement. Une autre couleur pourrait être considérée comme un signe distinctif par le jury, auquel cas la note de zéro serait attribuée. De même, l'utilisation de crayon surligneur est interdite.

Les étiquettes d'identification codes à barres, destinées à permettre à l'administration d'identifier votre copie, ne doivent être détachées et collées dans les deux cadres prévus à cet effet qu'en présence d'un membre de la commission de surveillance.

Suivre les instructions données pour les étiquettes d'identification

NOTE / 20

RÉSERVÉ À L'ADMINISTRATION

À L'ATTENTION DU CORRECTEUR

Pour remplir ce document :

Utilisez un stylo ou une pointe feutre de couleur NOIRE ou BLEUE.

EXEMPLE DE MARQUAGE : Faire comme ceci — Ne pas faire

Pour porter votre note, cochez les gélules correspondantes.

Reportez la note dans les zones **NOTE / 20** et dans le cadre **A**

En cas d'erreur de codification dans le report des notes cochez la case **erreur** et reportez la note dans le cadre **B**.

Cadre **A** réservé à la notation

20	19	18
17	16	15
14	13	12
11	10	09
08	07	06
05	04	03
02	01	00

Décimales

,00 ,25 ,50 ,75

Cadre **B** réservé à la notation rectificative

20	19	18
17	16	15
14	13	12
11	10	09
08	07	06
05	04	03
02	01	00

Décimales

,00 ,25 ,50 ,75

Erreur

NOTE / 20

N°140 - IMPRIMERIE NATIONALE 2014 01 51061 PO - Juin 2014 - 145 112

EN AUCUN CAS, LE CANDIDAT NE FERMERA LE VOLET RABATTABLE AVANT D'Y AVOIR ÉTÉ AUTORISÉ PAR LA COMMISSION DE SURVEILLANCE

DIRECTION GÉNÉRALE DES FINANCES PUBLIQUES

SUJET

MATHÉMATIQUES

Code matière : 030

Les candidats sont autorisés à utiliser les matériels et documents suivants :

- calculatrices électroniques, y compris programmables et alphanumériques à fonctionnement autonome sans imprimante, à entrée unique par clavier ;
- règles à calcul, équerres, compas et rapporteur ;
- tables de logarithmes ne comportant aucune formule algébrique, géométrique ou trigonométrique.

Le candidat traitera obligatoirement les quatre exercices ci-dessous :

EXERCICE 1

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction polynomiale P_n : $[0;+\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in [0;+\infty[$, par :

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k} = -x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{-x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{x^{2n}}{2n}$$

I. Étude des fonctions polynomiales P_n

1. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0;+\infty[$:

$$P'_n(x) = \frac{x^{2n}-1}{x+1}$$ où P'_n désigne la dérivée de P_n.

2. Établir, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les variations de P_n sur $[0;+\infty[$ et dresser le tableau de variations de P_n.

3. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P_n(1) < 0$.

4. a) Vérifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0;+\infty[$:

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + x^{2n+1}\left(\frac{-1}{2n+1} + \frac{x}{2n+2}\right)$$

b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P_n(2) \geq 0$.

5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $P_n(x) = 0$, d'inconnue $x \in [1;+\infty[$, admet une solution et une seule notée x_n, et que :

$$1 < x_n \leq 2$$

Tournez la page S.V.P.

II. Limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

1. Établir, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in[0\,;+\infty[$:

$$P_n(x)=\int_0^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}\,dt$$

2. En déduire, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}\,dt=\int_0^1 \frac{1-t^{2n}}{t+1}\,dt$$

3. Démontrer, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $t\in[1\,;+\infty[$:

$$t^{2n}-1\geq n(t^2-1)$$

4. En déduire, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}\,dt\geq\frac{n}{2}(x_n-1)^2 \quad ;$$

puis :

$$0< x_n-1\leq\frac{\sqrt{2\ln 2}}{\sqrt{n}}$$

5. Conclure quant à la convergence et à la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

<u>EXERCICE 2</u>

On considère les trois matrices de $M_2(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ,\ D=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ,\ U=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. a) Quelles sont les valeurs propres de A ?
b) Déterminer une matrice inversible P telle que $A=PDP^{-1}$.
On note E l'ensemble des matrices carrées M d'ordre 2 telles que : $AM=MD$.

2. a) Vérifier que E est un sous espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$.
b) Soit $M=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ une matrice de $M_2(\mathbb{R})$
Montrer que M appartient à E si et seulement si : $z=0$ et $y=t$.
c) Etablir que (U,A) est une base de E .
d) Calculer le produit UA . Est-ce que UA est élément de E ?

3. On note $f:M_2(\mathbb{R})\to M_2(\mathbb{R})$ l'application définie , pour tout $M\in M_2(\mathbb{R})$,par : $f(M)=AM-MD$.
a) Vérifier que f est linéaire.
b) Déterminer le noyau de f et donner sa dimension.
c) Quelle est la dimension de l'image de f ?
d) déterminer les matrices M de $M_2(\mathbb{R})$ telles que $f(M)=M$.
En déduire que 1 est valeur propre de f .
Montrer que -1 est aussi valeur propre de f .
e) Est-ce que f est diagonalisable ?
f) Montrer que $f\circ f\circ f=f$

EXERCICE 3

1) Montrer que $\mathbb{R}$ muni des lois $x \oplus y = x + y - 1$ et $x \otimes y = x + y - xy$ est un anneau ?

2) Cet anneau est-il commutatif ?

3) Cet anneau est-il un corps ?

EXERCICE 4

Un entier n est dit somme de carrés s'il existe deux entiers a et b tel que $n = a^2 + b^2$

1) Montrer que si n et p sont sommes de deux carrés alors leur produit $n \times p$ l'est aussi.
   Indication on pourra s'aider des nombres complexes.
2) Exemple , on a $5 = 1^2 + 2^2$ et $401 = 20^2 + 1^2$, quelle est la décomposition en somme de deux carrés de 2005 ?