DIRECTION GÉNÉRALE DES FINANCES PUBLIQUES

# CONCOURS EXTERNE POUR L'ACCÈS AU GRADE D'INSPECTEUR DES FINANCES PUBLIQUES

## ANNÉE 2015

## ÉPREUVE ÉCRITE D'ADMISSIBILITÉ N° 2

*Durée : 3 heures - Coefficient : 5*

## Mathématiques

*Toute note inférieure à 5/20 est éliminatoire.*

***Recommandations importantes***

*Le candidat trouvera au verso la manière de servir la copie dédiée.*

*Sous peine d'annulation de sa copie, le candidat ne doit porter aucun signe distinctif (nom, prénom, signature, numéro de candidature, etc.) en dehors du volet rabattable d'en-tête.*

*Il devra obligatoirement se conformer aux directives données.*

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DES FINANCES ET DES COMPTES PUBLICS

**Tournez la page S.V.P.**

**Le candidat devra compléter l'intérieur du volet rabattable des informations demandées et se conformer aux instructions données**

Nom de naissance

Prénom usuel

Jour, mois et année

Nom : ...........
Prénom : ...........
Date de naissance : ...........
N° de candidature : ...........
(si absence de code barre)
Signature :

Numéro de candidature

Signature obligatoire

*À compléter par le candidat*

*Ne rabattre le cache qu'en présence d'un membre de la commission de surveillance*

ÉTIQUETTE D'IDENTIFICATION

Axe de lecture code à barres candidat

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

Faire comme ceci

Ne pas faire

ÉTIQUETTE D'IDENTIFICATION

Axe de lecture code à barres candidat

Concours externe - interne - professionnel - ou examen professionnel (1)
(1) Rayer les mentions inutiles

externe

Pour l'emploi de : Inspecteur des Finances publiques

Épreuve n° : 2

Matière : 030 – Mathématiques

Date : 0 9 0 9 2 0 1 4

Préciser éventuellement le nombre d'intercalaires supplémentaires

Nombre d'intercalaires supplémentaires :

### À L'ATTENTION DU CANDIDAT

**En dehors de la zone d'identification rabattable, les copies doivent être totalement anonymes et ne comporter aucun élément d'identification tel que nom, prénom, signature, paraphe, localisation, initiale, numéro, ou toute autre indication même fictive étrangère au traitement du sujet.**

**Il est demandé aux candidats d'écrire et de souligner si nécessaire au stylo bille, plume ou feutre, de couleur noire ou bleue uniquement. Une autre couleur pourrait être considérée comme un signe distinctif par le jury, auquel cas la note de zéro serait attribuée. De même, l'utilisation de crayon surligneur est interdite.**

**Les étiquettes d'identification codes à barres, destinées à permettre à l'administration d'identifier votre copie, ne doivent être détachées et collées dans les deux cadres prévus à cet effet qu'en présence d'un membre de la commission de surveillance.**

**Suivre les instructions données pour les étiquettes d'identification**

NOTE / 20
|__|__|,|__|__|

### RÉSERVÉ À L'ADMINISTRATION

### À L'ATTENTION DU CORRECTEUR

**Pour remplir ce document :**
**Utilisez un stylo ou une pointe feutre de couleur NOIRE ou BLEUE.**

**EXEMPLE DE MARQUAGE :** Faire comme ceci — Ne pas faire

Pour porter votre note, cochez les gélules correspondantes.

Reportez la note dans les zones **NOTE / 20** et dans le cadre **A**

En cas d'erreur de codification dans le report des notes cochez la case **erreur** et reportez la note dans le cadre **B**.

| Cadre A réservé à la notation | | |
|---|---|---|
| 20 | 19 | 18 |
| 17 | 16 | 15 |
| 14 | 13 | 12 |
| 11 | 10 | 09 |
| 08 | 07 | 06 |
| 05 | 04 | 03 |
| 02 | 01 | 00 |

Décimales

| ,00 | ,25 | ,50 | ,75 |
|---|---|---|---|

| Cadre B réservé à la notation rectificative | | |
|---|---|---|
| 20 | 19 | 18 |
| 17 | 16 | 15 |
| 14 | 13 | 12 |
| 11 | 10 | 09 |
| 08 | 07 | 06 |
| 05 | 04 | 03 |
| 02 | 01 | 00 |

Décimales

| ,00 | ,25 | ,50 | ,75 |
|---|---|---|---|

Erreur

NOTE / 20
|__|__|,|__|__|

**EN AUCUN CAS, LE CANDIDAT NE FERMERA LE VOLET RABATTABLE AVANT D'Y AVOIR ÉTÉ AUTORISÉ PAR LA COMMISSION DE SURVEILLANCE**

N°140 - IMPRIMERIE NATIONALE 2014 01 51061 PO - Juin 2014 - 145 112

SUJET

**MATHÉMATIQUES**

Code matière : 030

Les candidats sont autorisés à utiliser les matériels et documents suivants :

- calculatrices électroniques, y compris programmables et alphanumériques à fonctionnement autonome sans imprimante, à entrée unique par clavier ;
- règles à calcul ;
- tables de logarithmes ne comportant aucune formule algébrique, géométrique ou trigonométrique.

**Le candidat traitera obligatoirement les quatre exercices ci-dessous :**

## EXERCICE 1

Dans l'ensemble $M_3$ des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels, on considère les matrices P et Q définies comme suit :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$ et $Q = I - P$, $I$ étant la matrice unité de $M_3$

1. a. Calculer $P^2$

   b. En déduire les produits : $PQ, QP,$ et $Q^2$.

2. Soit $\Phi$ l'ensemble des matrices de la forme $\alpha P + \beta Q$ où $\alpha$ et $\beta$ sont des réels.

   a. Montrer que le produit de deux matrices de $\Phi$ est une matrice appartenant à $\Phi$.

   b. Montrer que, lorsqu'elle existe, la matrice inverse $A^{-1}$ d'une matrice $A = \alpha P + \beta Q$ de $\Phi$ est une matrice de $\Phi$ avec $A^{-1} = \frac{1}{\alpha}P + \frac{1}{\beta}Q$.



Tournez la page S.V.P.

3. On se propose de résoudre le système d'équations suivant :

$$(E) = \begin{cases} \dfrac{1+3\sqrt{2}}{4}x + \dfrac{1-\sqrt{2}}{4}y + \dfrac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}z = 1 \\ \dfrac{1-\sqrt{2}}{4}x + \dfrac{1+3\sqrt{2}}{4}y + \dfrac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}z = 1 \\ \dfrac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}x + \dfrac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}y + \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}z = 1 \end{cases}$$

a. Montrer que le système $(E)$ peut se ramener à une équation de la forme :

$(P + \lambda Q)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ où $\lambda$ est un réel que l'on déterminera.

b. En déduire les solutions de $(E)$.

## EXERCICE 2

Soient les suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\begin{cases} u_0 = \sin\alpha \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n v_{n+1}} \\ v_0 = \tan\alpha \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \end{cases} \quad \alpha \in \left]0; +\frac{\pi}{2}\right[$$

1) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ et $v_n > 0$

2) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n \sin\frac{\alpha}{2^n}$ et $v_n = 2^n \tan\frac{\alpha}{2^n}$

3) Déterminer le sens de variation des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n < v_n$

4) En déduire que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes. Montrer qu'elles convergent vers une limite commune et déterminer cette limite.

**EXERCICE 3**

Les deux questions sont indépendantes.

1) Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $(e_{1,}e_{2,}e_3)$, on considère la droite $d$ passant par $A(1,2,3)$ et dirigée par $u = e_1 + e_2 + e_3$ et la droite $d'$ passant par A et dirigée par $v = e_1 + 2e_2 + e_3$.

Déterminer une équation cartésienne du plan $P$ contenant $d$ et $d'$

2) On choisit un repère orthonormé d'origine $O$.

Soit $(ABCD)$ un quadrilatère, on note $a, b, c$ et $d$ les affixes respectives des points $A, B, C$ et $D$. On note $A', B', C'$ et $D'$ les milieux respectifs des côtés $[A, B], [B, C], [C, D]$ et $[D, A]$.

Montrer que $(A'B'C'D')$ est un parallélogramme.

**EXERCICE 4**

Soit la fonction $f$ telle que : $f_\lambda(x) = (x)^{x^\lambda}$où $\lambda \in \mathbb{R}^*$

1. Donner le domaine de définition de $f$.

2. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x$ selon les valeurs de $\alpha$ non nul.

3. a. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f_\lambda(x)$ .

   b. En déduire que pour tout $\lambda$ on peut effectuer un prolongement par continuité de $f_\lambda$ pour $x = 0$.

   c. Déterminer la demi-tangente à $C_\lambda$ au point $x = 0$.

4. a. Calculer $f_\lambda'(x)$.

   b. Montrer que selon $\lambda$ la fonction admet soit un maximum, soit un minimum.

5. a. Effectuer un développement limité à l'ordre 2 de $f_\lambda(x)$ au voisinage de 1.

   b. En déduire la position de $C_\lambda$ par rapport à sa tangente au voisinage du point $x = 1$.

6. Etudier la limite de $f_\lambda(x)$ pour $x \to +\infty$

7. Pour $\lambda$ et $\mu$ réels, et $\lambda > \mu$ , donner les positions relatives de $C_\lambda$ et $C_\mu$.